PEMBAHASAN TES KEMAMPUAN DASAR SAINS DAN TEKNOLOGI SBMPTN 2013 KODE 431

1. Persamaan lingkaran dengan pusat $(-1,1)$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 12 = 0$ adalah ...
   Sebelum menentukan persamaan lingkarannya, kita tentukan jari-jari lingkaran tersebut. Jari-jari lingkaran tersebut sama dengan jarak antara titik pusat $(-1,1)$ dengan garis $3x - 4y + 12 = 0$.
   Jarak antara titik (x_1, y_1) dengan garis yang memiliki persamaan $ax + by + c = 0$ adalah,
   $$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
   Sehingga,
   $$\begin{aligned} r &= \frac{|3(-1) - 4(1) + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{|-3 - 4 + 12|}{\sqrt{9 + 16}} \\ &= \frac{|5|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$
   Persamaan lingkaran yang memiliki titik pusat di (x_1, y_1) dan berjari-jari r dapat ditentukan dengan rumus,
   $$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$
   Sehingga persamaan lingkaran yang berpusat di $(-1,1)$ dan memiliki jari-jari 1, dapat ditentukan sebagai berikut.
   $$\begin{aligned} & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \big(x - (-1)\big)^2 + (y - 1)^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$
   Jawaban A.

2. $\cot 105° \tan 15° = \cdots$

Untuk menentukan hasil dari operasi hitung tersebut, kita dapat menggunakan sifat-sifat berikut:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

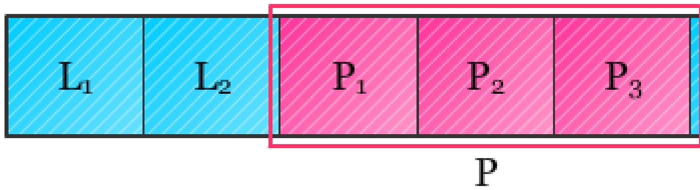
$$2\cos\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\cot 105° \tan 15° &= \frac{\cos 105°}{\sin 105°} \times \frac{\sin 15°}{\cos 15°} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2\cos 105° \sin 15°)}{\frac{1}{2}(2\sin 105° \cos 15°)} \\
&= \frac{\sin(105+15)° - \sin(105-15)°}{\sin(105+15)° + \sin(105-15)°} \\
&= \frac{\sin 120° - \sin 90°}{\sin 120° + \sin 90°} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1} \times \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1}{\frac{3}{4} - 1} \\
&= \frac{\frac{7}{4} - \sqrt{3}}{-\frac{1}{4}} = -7 + 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Jawaban A.

3. Enam anak, 3 laki-laki dan 3 perempuan, duduk berjajar. Peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah …
Untuk memahami permasalahan ini, perhatikan gambar berikut!

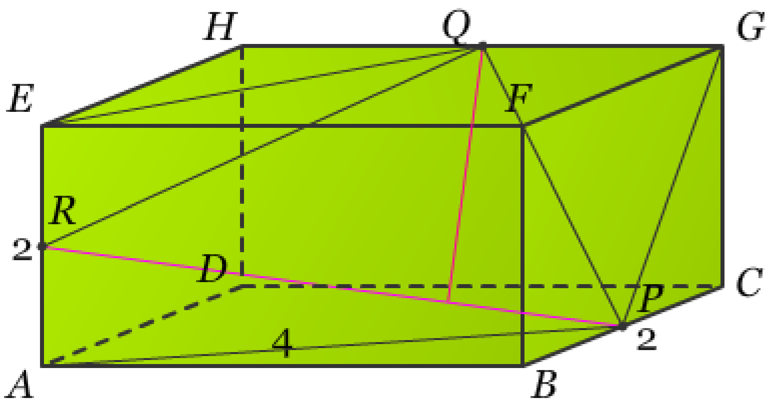


Karena 3 perempuan harus duduk berdampingan, kita dapat menganalogikan aturan ini sebagai pengelompokan, seperti tampak pada gambar di atas. Sehingga yang perlu kita acak hanyalah L1, L2, P, dan L3 dan diperoleh P_4^4 kemungkinan. Akan tetapi pada kelompok tersebut terdapat 3 perempuan, sehingga apabila kita acak kita mempeoleh P_3^3 kemungkinan.
Sehingga peluangnya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{P_4^4 \cdot P_3^3}{P_6^6} \\ &= \frac{\frac{4!}{(4-4)!} \cdot \frac{3!}{(3-3)!}}{\frac{6!}{(6-6)!}} \\ &= \frac{4! \cdot 3!}{6!} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{144}{720} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Jawaban E.

4. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$, $BC = AE = 2$. Titik P tengah-tengah BC, Q titik tengah GH, R titik tengah AE. Jarak Q ke PR adalah …
Perhatikan gambar berikut!



Sebelum menentukan jarak antara Q ke PR, kita tentukan dulu PR, PQ, dan QR

Menentukan Panjang $\overline{PR}$

Untuk menentukan PR, kita tentukan AP terlebih dahulu. $\overline{AP}$ merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku ABP. Sehingga,

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AB^2 + BP^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$\overline{PR}$ merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku APR, sehingga

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{AP^2 + AR^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{17}^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{17 + 1} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Diperoleh $PR = 3\sqrt{2}$.

Menentukan Panjang $\overline{QR}$

Sebelum menentukan RQ, kita tentukan EQ terlebih dahulu. Perhatikan bahwa $\overline{EQ}$ merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku EHQ, sehingga

$$EQ = \sqrt{EH^2 + HQ^2}$$

$= \sqrt{2^2 + 2^2}$

$= \sqrt{4 + 4}$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Setelah itu, kita tentukan RQ. $\overline{RQ}$ merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku ERQ. Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
RQ &= \sqrt{ER^2 + EQ^2} \\
&= \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + 8} \\
&= \sqrt{9} = 3
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $RQ = 3$.

Menentukan Panjang $\overline{PQ}$

$\overline{PQ}$ merupakan sisi miring dari segitiga siku-siku PGQ. Sehingga sebelum menentukan PQ, kita tentukan terlebih dahulu PG. Panjang $\overline{PG}$ dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku PCG.

$$
\begin{aligned}
PG &= \sqrt{PC^2 + CG^2} \\
&= \sqrt{1^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{1 + 4} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

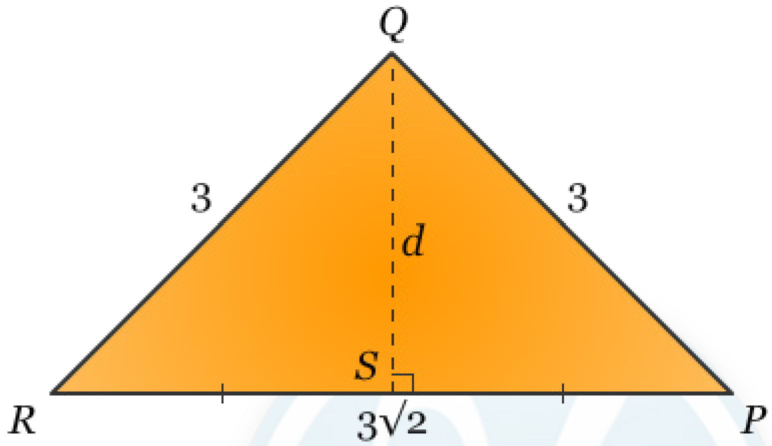
Selanjutnya kita tentukan PQ dengan menggunakan segitiga siku-siku PGQ.

$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{PG^2 + GQ^2} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{5 + 4} \\
&= \sqrt{9} = 3
\end{aligned}
$$

Diperoleh $PQ = 3$

Menentukan Jarak Q dengan $\overline{PR}$

Untuk menentukan jarak Q ke $\overline{PR}$, perhatikan segitiga PQR. Sebelumnya kita memperoleh $PR = 3\sqrt{2}$, $RQ = 3$, dan $PQ = 3$. Sehingga segitiga tersebut merupakan segitiga sama kaki. Perhatikan gambar segitiga PQR berikut.



Karena PQR segitiga sama kaki, maka garis yang melewati Q dan tegak lurus dengan $\overline{PR}$ membagi $\overline{PR}$ menjadi 2 bagian yang sama. Sehingga,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{PQ^2 - PS^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{9 - \frac{9}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, jarak titik Q ke ruas garis PR adalah ${}^{3}/{}_{2}\sqrt{2}$.

Jawaban D.

5. Jika $L(a)$ adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu X dan parabola $y = 2ax - x^2$, $0 < a < 1$, maka peluang nilai a sehingga $L(a) \leq {}^{9}/{}_{16}$ adalah ...

Perhatikan bahwa: $y = 2ax - x^2 = x(2a - x)$. Sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di $x = 0$ dan $x = 2a$, yang terletak di antara $x = 0$ dan $x = 2$.
Sehingga luas yang dibatasi oleh parabola tersebut dengan sumbu X adalah,

$$\begin{aligned}
L(a) &\leq \int_0^{2a} 2ax - x^2\, dx \\
\Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} &\leq \left[ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{2a} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} &\leq \left[a(2a)^2 - \frac{1}{3}(2a)^3\right] - \left[a(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right] \\
\Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} &\leq 4a^3 - \frac{8}{3}a^3 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} &\leq \frac{4}{3}a^3 \\
\Leftrightarrow \quad 0 &\leq \frac{4}{3}a^3 - \frac{9}{16} \\
\Leftrightarrow \quad 0 &\leq 64a^3 - 27
\end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai a, kita selesaikan persamaan $64a^3 - 27 = 0$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}
64a^3 - 27 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad (4a)^3 - 3^3 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad (4a - 3)((4a)^2 + 4a \cdot 3 + 3^2) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad (4a - 3)(16a^2 + 12a + 9) &= 0
\end{aligned}$$

Sehingga, selesaian dari persamaan tersebut adalah $a = {}^3/_4$. Selanjutnya kita lakukan uji titik untuk menentukan tanda dari $L(a)$.

$$a = \frac{1}{4} \Longrightarrow L(a) = 64\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 27 = -26 < 0$$

$$a = \frac{5}{6} \Longrightarrow L(a) = 64\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 27 = 10\frac{1}{27} \geq 0$$

Sehingga tanda dari $L(a)$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Jadi peluang $L(a) \geq 0$ adalah

$$P(A) = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 - 0} = \frac{1}{4}$$

Jawaban E.

6. Diketahui $A(3, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, dan $C(0, 0, 6)$. Panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{AC}$ ke vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah ...

Misalkan vektor proyeksi $\overrightarrow{AC}$ ke vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah c, panjang c dapat ditentukan dengan rumus:

$$c = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

Untuk itu, kita tentukan $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, dan $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ terlebih dahulu.

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 3, 0 - 0, 6 - 0) = (-3, 0, 6)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, -3 - 0, 0 - 0) = (-3, -3, 0)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Sehingga,

$$c = \frac{(-3 \cdot -3) + (0 \cdot -3) + (6 \cdot 0)}{3\sqrt{2}} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Jawaban C

7. Jika $\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{2A}$ dan $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2B}$, maka $\cos(\alpha - \beta) = \cdots$

Perhatikan bahwa,

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta$$

Karena $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, dan

$$2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$$

Maka,

$$\begin{aligned} (\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 &= 1 + 2\cos(\alpha - \beta) + 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2A}^2 + \sqrt{2B}^2 &= 2 + 2\cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2A + 2B = 2 + 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(\alpha - \beta) = 2A + 2B - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha - \beta) = A + B - 1$$

Jawaban A.

8. Transformasi T merupakan pencerminan terhadap garis $y = 4x$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = -{}^{x}/_{4}$. Matriks penyajian T adalah ...

   Transformasi sembarang titik oleh tranformasi T sama dengan pencerminan titik tersebut terhadap titik $(0, 0)$, karena $y = 4x$ dan $y = -{}^{x}/_{4}$ saling tegak lurus dan berpotongan di $(0, 0)$.

   Sehingga,

   $$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Jawaban E.

9. Diketahui $F(x) = bx^3 - 3(1 + a)x^2 - 3x$. Jika $F''(x)$ habis dibagi $x - 1$, maka kurva $y = F(x)$ tidak mempunyai titik ekstrim lokal jika ...

   Diketahui bahwa $F''(x)$ habis dibagi $x - 1$. Sekarang kita tentukan turunan kedua fungsi F tersebut.

   $$F'(x) = 3bx^2 - 6(1 + a)x - 3$$
   $$F''(x) = 6bx - 6(1 + a)$$

   $F''(x)$ habis dibagi $x - 1$ artinya $F''(1) = 0$. Sehingga,

   $$F''(1) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad 6b \cdot 1 - 6(1 + a) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad 6b - 6 - 6a = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad 6a = 6b - 6$$

   $$\Leftrightarrow \quad a = b - 1$$

   Dengan mensubstitusi $a = b - 1$ ke persamaan fungsi, diperoleh

   $$F(x) = bx^3 - 3bx^2 - 3x$$

   Kurva $y = F(x)$ tidak mempunyai titik ekstrim lokal jika turunan pertamanya hanya memiliki paling banyak 1 akar.

   $$F'(x) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad 3bx^2 - 6bx - 3 = 0$$

Sehingga akar dari turunan pertama F paling banyak 1, maka $D \leq 0$.

$$\begin{aligned} D &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad (-6b)^2 - 4 \cdot 3b \cdot (-3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad 36b^2 + 36b &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad b^2 + b &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad b(b+1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Sehingga, $-1 \leq b \leq 0$.

Jawaban B.

10. Banyak bilangan ratusan dengan bilangan pertama dan terakhir mempunyai selisih 3 dan tidak ada angka yang sama adalah …

Bilangan-bilangan yang memiliki selisih 3 adalah 0 dan 3, 1 dan 4, 2 dan 5, 3 dan 6, 4 dan 7, 5 dan 8, 6 dan 9, serta kebalikannya kecuali 0 dan 3. Sehingga banyaknya bilangan yang memiliki selisih 3 adalah 13.

1		4	5		8	7		4
2		5	6		9	6		3
3		6	9		6	5		2
4		7	8		5	4		1
						3		0

Bilangan ratusan terdiri dari 3 bilangan, maka banyaknya kemungkinan bilangan kedua adalah 10 – 2 = 8. Sehingga, banyaknya kemungkinan bilangan ratusan yang memenuhi syarat tersebut adalah 13 × 8 = 104.

Jawaban –

11. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = |x|$ adalah ...

Perhatikan bahwa,

Fungsi $y = |x|$ dapat juga didefinisikan sebagai berikut:

$$y = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

Sehingga kita tentukan terlebih dahulu titik perpotongan antara grafik fungsi $y = 2 - x^2$ dan $y = |x|$.

Titik potong pertama, untuk $x < 0$

Titik potongnya dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan y di kedua fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} & 2 - x^2 &&= -x \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - x - 2 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)(x+1) &&= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $x = 2$ atau $x = -1$. Karena $x < 0$, kita pilih $x = -1$

Titik potong kedua, untuk $x \geq 0$

Sama seperti sebelumnya, titik potongnya dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan y di kedua fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} & 2 - x^2 &&= x \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + x - 2 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+2)(x-1) &&= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $x = -2$ atau $x = 1$. Karena $x \geq 0$, kita pilih $x = 1$

Menentukan luas

Selanjutnya kita tentukan luasnya.

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{0} 2 - x^2 - (-x)\,dx + \int_{0}^{1} 2 - x^2 - x\,dx \\ \Leftrightarrow\quad &= 2\int_{-1}^{0} -x^2 + x + 2\,dx \end{aligned}$$

Jawaban A.

12. $\int 4\sin^2 x \cos^2 x\,dx = \cdots$

Perhatikan bahwa $2\sin x\cos x = \sin 2x$, maka

$$\begin{aligned}\int 4\sin^2 x\cos^2 x\,dx &= \int (2\sin x\cos x)^2 dx\\ &= \int \sin^2 2x\,dx\\ &= \int \frac{1-\cos 4x}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C\end{aligned}$$

Jawaban B

13. Diketahui $f(x) = {}^1/_3\,x^3 + x^2 - 3x + 13$. Jika $g(x) = f(1-x)$, maka kurva g naik pada selang ...

Pertama, kita tentukan fungsi g.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(1-x)\\ &= {}^1/_3\,(1-x)^3 + (1-x)^2 - 3(1-x) + 13\\ &= {}^1/_3\,(1-3x+3x^2-x^3) + 1 - 2x + x^2 - 3 + 3x + 13\\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{34}{3}\end{aligned}$$

Kurva naik ketika turunan pertamanya lebih dari atau sama dengan 0.

$$\begin{aligned} g'(x) &\geq 0\\ \Leftrightarrow\quad -x^2 + 4x &\geq 0\\ \Leftrightarrow\quad x(4-x) &\geq 0\end{aligned}$$

Sehingga, $0 \leq x \leq 4$.

Jawaban D.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan x}{x\sin x - \cos x + 1} = \cdots$

Limit dari soal tersebut dapat ditentukan sebagai berikut

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{x\sin x - \cos x + 1} = \lim_{x\to o} \frac{\frac{x\tan x}{x^2}}{\frac{x\sin x}{x^2} - \left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{-2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to o} \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{{}^{3}/_{2}} = \frac{2}{3}$$

Jawaban D.

15. Jika $x^4 + (a - 10)x^3 + bx^2 + 24x - 15 = f(x)(x - 1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $x - 1$, maka nilai a adalah …

Diketahui $x^4 + (a - 10)x^3 + bx^2 + 24x - 15 = f(x)(x - 1)$ dan $f(x)$ habis dibagi $x - 1$, artinya $x^4 + (a - 10)x^3 + bx^2 + 24x - 15$ habis dibagi $(x - 1)(x - 1)$.

Dengan menggunakan cara Horner kita dapat memperoleh,

	1	a - 10	b	24	-15
1		1	a - 9	a + b - 9	a + b + 15
	1	a - 9	a + b - 9	a + b + 15	a + b
1		1	a - 8	2a + b - 17	
	1	a - 8	2a + b - 17	3a + 2b - 2	

Sehingga,

$a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ ... (1)

$3a + 2b - 2 = 0$ ...(2)

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (2), kita peroleh

$$
\begin{aligned}
3a - 2a - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad a - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad a &= 2
\end{aligned}
$$

Jawaban D.

Semoga bermanfaat, **yos3prens**