SOAL DAN PEMBAHASAN

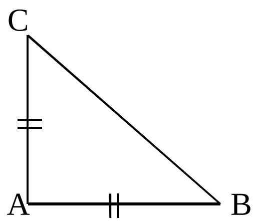
UJIAN NASIONAL

SMA/MA IPA

TAHUN PELAJARAN 2004/2005

1. Keliling segitiga ABC pada gambar adalah 8 cm. Panjang sisi AB = ...

A. $4\sqrt{2}$ cm
B. (4- $\sqrt{2}$) cm
C. (4- $2\sqrt{2}$) cm
D. (8- $2\sqrt{2}$) cm
E. (8- $4\sqrt{2}$) cm



Jawab:

misal panjang AB = a , panjang AB = panjang AC

BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Keliling ABC = AB + BC + AC

$= a + a\sqrt{2} + a = 8$

$2a + a\sqrt{2} = 8$

$a(2 + \sqrt{2}) = 8$

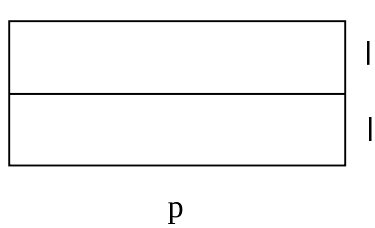
$$a = \frac{8}{2+\sqrt{2}} = \frac{8}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{8(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{8(2-\sqrt{2})}{2}$$

$= 4(2 - \sqrt{2}) = (8 - 4\sqrt{2})$ cm

Jawabannya adalah E

2. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar di bawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah…..

A . 16 m
B . 18 m
C . 20 m
D. 22m
E. 24m



Jawab:

Luas = p . 2 l

Keliling = 3p + 4l = 120

$4l = 120 - 3p$

$l = \frac{120 - 3p}{4} = 30 - \frac{3}{4}p$

Luas = p . 2 $(30 - \frac{3}{4}p)$

$= 60p - \frac{3}{2}p^2$

Agar luas maksimum maka differensial luas (Luas') = 0

Luas' = 60 – 3p = 0

60 = 3p

$p = \frac{60}{3} = 20$ m

Jawabannya adalah C

3. Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang 2 kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah ......

A . 39 tahun
C . 49 tahun
E. 78 tahun
B . 43 tahun
D. 54 tahun

Jawab:

misal:
umur ayah sekarang = x
umur Budi sekarang = y

Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi:

x – 7 = 6 (y-7)
x-7 = 6y – 42
x – 6y = -35 …..(1)

Empat tahun yang akan datang 2 kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun:

2 (x + 4) = 5 (y + 4) + 9
2x + 8 = 5y + 20 + 9
2x – 5y = 21 …..(2)

substitusi pers (1) dan (2)

karena yang dicari adalah x maka eliminasi y:

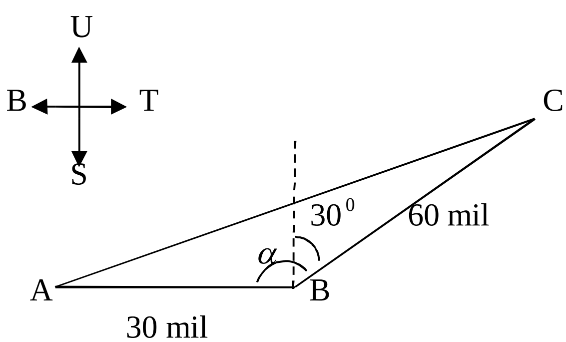
$$\begin{array}{lll} x - 6y = -35 & \times 5 \Rightarrow & 5x - 30y = -175 \\ 2x - 5y = 21 & \times 6 \Rightarrow & \underline{12x - 30y = 126} \;\; - \\ & & -7x \quad = -301 \\ & & \quad x \quad = 43 \end{array}$$

Jawabannya adalah B

4. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 30 mil. Kemudian kapal melanjutkan perjalanan dengan arah 030° sejauh 60 mil. Jarak kapal terhadap posisi saat kapal berangkat adalah ....

A . $10\sqrt{37}$ mil
C . $30\sqrt{(5+2\sqrt{2})}$ mil
E. $30\sqrt{(5-2\sqrt{3})}$ mil
B . $30\sqrt{7}$ mil
D. $30\sqrt{(5+2\sqrt{3})}$ mil

Jawab:



AC = ….?

“ Patokan arah adalah dari utara ”

$\alpha = 90^0 + 30^0 = 120^0$

Aturan cosinus

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB\,.\,BC \cos\alpha$$
$$= 30^2 + 60^2 - 2\,.\,30.\,60\,.\cos 120^0$$
$$= 900 + 3600 - 3600\,.\,(-\frac{1}{2})$$
$$= 4500 + 1800 = 6300$$

$AC = \sqrt{6300} = \sqrt{63.100} = 10\sqrt{63} = 10\sqrt{9.7} = 3.\,10\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$ mil

Jawabannya adalah B

5. Nilai dari tan 165° = ...

A . $1 - \sqrt{3}$ C . $-2 + \sqrt{3}$ E . $2 + \sqrt{3}$

B . $-1 + \sqrt{3}$ D . $2 - \sqrt{3}$

Jawab:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{rumus:}\\ \tan\ (180^0 - \theta) = -\tan\ \theta\end{array}}$$

tan 165° = $\tan(180^0 - 15^0) = -\tan 15^0 = -\tan(45^0 - 30^0)$

$$= -\frac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \tan 30^0}$$

$$= -\frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+1.\frac{1}{3}\sqrt{3}} = -\frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}\ \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-.\frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$= -2 + \sqrt{3}$$

Jawabannya adalah C

6. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan : $2 \log x \leq \log (2x + 5) + 2 \log 2$ adalah ....

A . $-\frac{5}{2} < x \leq 10$ C . $0 < x \leq 10$ E . $-\frac{5}{2} \leq x < 0$

B . $-2 \leq x \leq 10$ D . $-2 < x < 0$

Jawab:

$2 \log x \leq \log (2x + 5) + 2 \log 2$

$\log x^2 \leq \log (2x + 5) + \log 2^2$

$\log x^2 \leq \log (2x + 5).\ 2^2$

$\log x^2 \leq \log (8x + 20)$

$x^2 \leq (8x + 20)$

$x^2 - 8x - 20 \leq 0$

$(x-10)(x+2) \leq 0$

$x = 10,\ x = -2$

$-2 \leq x \leq 10$ …..(1)

+++ -- - - - - - - - - - - - - + + +

-2 0 10

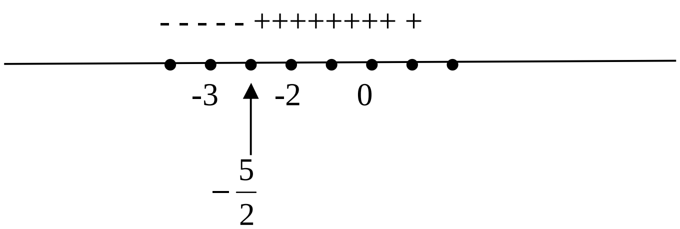
syarat logaritma ${}^{a}\log b \rightarrow b > 0$

$x > 0$ …..(2)

$2x + 5 > 0$

$2x > -5$

$x > -\frac{5}{2}$ …..(3)



Dari (1), (2) dan (3) didapat

$0 < x \leq 10$

Jawabannya adalah C

7. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola biru, dan 3 bola kuning. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil 2 bola merah dan 1 bola biru adalah ....

A . $\frac{1}{10}$ C . $\frac{1}{6}$ E. $\frac{4}{11}$

B . $\frac{5}{36}$ D. $\frac{2}{11}$

Jawab:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

n (S) = banyaknya cara untuk mengambil 3 bola (2 bola merah + 1 bola biru) dari 12 bola yang ada (total semua bola)

$$= C_3^{12} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12.11.10.9!}{3.2.1.9!} = 2.11.10 = 220$$

$n(A)$ = banyaknya cara pengambilan 2 bola merah dari 5 bola merah dan banyaknya cara pengambilan 1 bola biru dari 4 bola biru

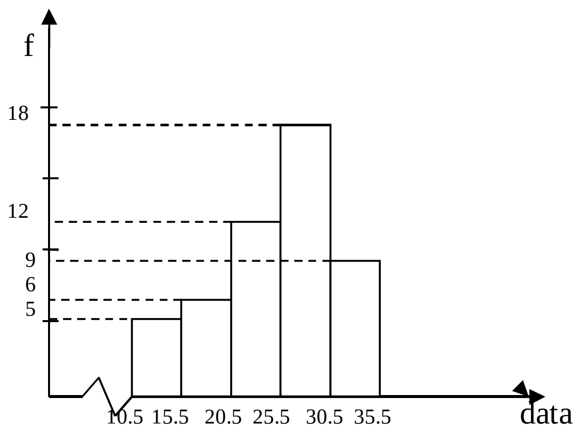
$= C_2^5 \cdot C_1^4$

$= \frac{5!}{2!(5-2)!} \; \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{5.4.3!}{2.1.3!} \; \frac{4 3!}{3!} = 10.\ 4 = 40$

maka P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{220} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$

Jawabannya adalah D

8. Nilai rataan dari data pada diagram di bawah adalah ....



A. 23 C. 26 E. 30
B. 25 D. 28

Jawab:

dari grafik di atas buat tabel datanya:

Data	Nilai tengah (x)	Frek (f)	f . x
11-15	13	5	65
16-20	18	6	108
21-25	23	12	276
26-30	28	18	504
31-35	33	9	297
		50	1.250

Rata-rata = $\frac{\sum f.x}{\sum f} = \frac{1250}{50} = 25$

Jawabannya adalah B

9. Persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 4) dan menyinggung garis 3x - 4y - 2 = 0 adalah........

A . $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 2 = 0$
B . $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
C . $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$
D . $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$
E . $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 16 = 0$

Jawab:

Persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 4) :

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$
$(x – 1)^2 + (y – 4)^2 = r^2$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 - r^2 = 0$
$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 - r^2 = 0$ …………. (1)

Menyinggung garis 3x - 4y - 2 = 0

$3x – 2 = 4y$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ …….(2)

Substitusi (2) ke (1)

$x^2 - 2x + (\frac{3}{4}x - \frac{1}{2})^2 - 8(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}) + 17 - r^2 = 0$

$-2x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} - 6x + 4 + 17 - r^2 = 0$

$\frac{25}{16}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{85}{4} - r^2 = 0$ → dikalikan 16

$25x^2 - 140x + (340 – 16r^2) = 0$

Agar menyinggung maka D = 0

$D = b^2 - 4 a.c$
$(-140)^2 - 4 . 25. (340 – 16r^2) = 0$
$19600 – 34000 + 1600r^2 = 0$
$1600r^2 = 14400$
$r^2 = 9$

maka persamaan lingkarannya adalah:

$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 - r^2 = 0$
$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 - 9 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$

Jawabannya adalah D

10. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang tegak lurus garis $2y - x + 3 = 0$ adalah ....

A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}$
D . $y = -2x + 5\sqrt{5}$
B . $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}$
E. $y = 2x + 5\sqrt{5}$
C . $y = 2x - 5\sqrt{5}$

Jawab:

Rumus persamaan garis singgung:
$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow$ lingkaran dengan pusat $(0,0) \rightarrow a = 0; b = 0$ dan $r = \sqrt{25} = 5$

pers garis : $2y - x + 3 = 0 \rightarrow 2y = x - 3$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

misal garis tersebut adalah a, maka didapat
Gradient garis a = $m_a = \frac{1}{2}$
Misal gradient garis singgung pada lingkaran = m_b
Karena tegak lurus maka $m_b = -\frac{1}{m_a}$

$$m_b = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Maka persamaan garis singgungnya adalah:

(1) $y - 0 = -2(x - 0) + 5\sqrt{1+(-2)^2}$
$y = -2x + 5\sqrt{5}$

(2) $y - 0 = -2(x - 0) - 5\sqrt{1+(-2)^2}$
$y = -2x - 5\sqrt{5}$

Jawabannya adalah D

11. Nilai x yang memenuhi persamaan $2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 - \sqrt{3} = 0$,

untuk 0° x 360° adalah ....

A . 45°, 105°, 225°, 285°
B . 45°, 135°, 225°, 315°
C . 15°, 105°, 195°, 285°
D . 15°, 135°, 195°, 315°
E . 15°, 225°, 295°, 315°

Jawab:

* $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$
$\cos 2A = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$
$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$
$2\cos^2 A = \cos 2A + 1$
* $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$2\sqrt{3}\,\cos^2 x - 2 \sin x \,.\, \cos x - 1 - \sqrt{3} = 0$
$\sqrt{3} \,.\, 2\cos^2 x - 2 \sin x \,.\, \cos x - 1 - \sqrt{3} = 0$
$\sqrt{3} \,.\, (\cos 2x + 1) - \sin 2x - 1 - \sqrt{3} = 0$
$\sqrt{3}\,.\cos 2x + \sqrt{3} - \sin 2x - 1 - \sqrt{3} = 0$
$\sqrt{3}\,.\cos 2x - \sin 2x - 1 = 0$
$\sqrt{3}\,.\cos 2x - \sin 2x = 1$
$\sqrt{3}\,.\cos 2x - \sin 2x = k \cos (2x - \alpha)$; $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$= k \cos 2x \cos \alpha + k \sin 2x \sin \alpha$

$k \cos \alpha = \sqrt{3}$
$k \sin \alpha = -1$

$\tan \alpha = \dfrac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ (sin = - dan cos = + berada di kuadaran IV)
$\alpha = 330^0$

$a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \alpha) = c$
$k = \sqrt{a^2 + b^2}$:
$\tan \alpha = \dfrac{b}{a}$

$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

dengan $k = 2$ dan $\alpha = 330^0$
$\sqrt{3}\,.\cos 2x - \sin 2x = k \cos (2x - \alpha)$

$\sqrt{3}$ .cos2x – sin2x = 2 cos (2x - 330^0)

2 cos (2x - 330^0) = 1

cos (2x - 330^0) = $\frac{1}{2}$

cos (2x - 330^0) = cos 60^0 atau cos (2x - 330^0) = cos 300^0

2x - 330^0 = 60^0 2x - 330^0 = 300^0

2x = 390^0 + k .360^0 2x = 630 + k . 360^0

jika k = 0 → 2x = 390^0 jika k = 0 → 2x = 630^0

x = 195^0 x = 315^0

jika k = -1 → 2x = 30^0 jika k = -1 → 2x = 270^0

x = 15^0 x = 135^0

Himpunan penyelesiannya adalah: {15^0, 135^0, 195^0, 315^0}

Jawabannya adalah D

12. Seutas tali dipotong menjadi 7 bagian dan panjang masing-masing potongan membentuk barisan geometri. Jika panjang potongan tali terpendek sama dengan 6 cm dan panjang potongan tali terpanjang sama dengan 384 cm, panjang keseluruhan tali tersebut adalah........

A . 378 cm C . 570 cm E . 1.530 cm
B . 390 cm D . 762 cm

Jawab:

$U_n = ar^{n-1}$

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ untuk r >1

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ untuk r <1

U_1 = a = 6

U_7 = 384 = ar^6

$6r^6$ = 384

r^6 = 64

r = 2

r > 1 maka menggunakan rumus $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$

$S_7 = \frac{6(2^7 - 1)}{2-1}$ = 6 . 127 = 762

Jawabannya adalah D

13. Seorang anak menabung di suatu bank dengan selisih kenaikan tabungan antar bulan tetap. Pada bulan pertama sebesar Rp 50.000,00, bulan kedua Rp 55.000,00, bulan ketiga Rp 60.000,00, dan seterusnya.
Besar tabungan anak tersebut selama 2 tahun adalah ....

A . Rp 1.315.000,00 C . Rp 2.040.000,00 E . Rp 2.640.000,00
B . Rp 1.320.000,00 D . Rp 2.580.000,00

Jawab:
Tabungan membentuk barisan aritmetika.
$U_1 = a = 50.000$
$b= 55.000 – 50.000 = 5000$
$n = 2$ tahun = 24 bulan

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,b)$$

$$S_{24} = \frac{24}{2}(2.\ 50000 + (24-1)\ 5000)$$
$$= 12\ \ (100000 + 115000)$$
$$= 12\ .\ 215000 = \text{Rp, } 2.580.000$$

Jawabannya adalah D

14. Matriks X berordo (2 x 2) yang memenuhi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ adalah}$$

A. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Jawab:

Jika A.B = C maka

1. A = C . B^{-1}
2. B = A^{-1} . C

Dipakai rumus (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Jawabannya adalah A

15. Diketahui A(1, 2, 3), B(3, 3, 1), dan C(7, 5, -3). Jika A, B, dan C segaris (kolinier), perbandingan $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$ = ...

A . 1 : 2
B . 2 : 1
C . 2 : 5
D . 5 : 7
E . 7 : 5

Jawab:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$
$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (5-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$ =3 : 6 = 1 : 2

Jawabannya adalah A

16. Persamaan peta suatu kurva oleh rotasi pusat O bersudut $\frac{\pi}{2}$, dilanjutkan dilatasi (0, 2) adalah x = 2 + y - y^2. Persamaan kurva semula adalah ....

A . y = - x^2 - x + 4
B . y = - x^2 - x – 4
C . y = - x^2 + x + 4
D. y = -2x^2 + x + 1
E . y = 2x^2 - x - 1

Jawab:

- rotasi pusat O bersudut $\frac{\pi}{2}$ = R(O, 90^0) = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- dilatasi (0, 2) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika A.B = C maka

1. A = C . B^{-1}
2. B = A^{-1} . C

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0-(-4)} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

x = $\frac{1}{2}$y' → y' = 2x

y = - $\frac{1}{2}$x' → x' = -2y

misalkan hasil pemetaannya adalah x = 2 + y - y^2. → x' = 2 + y' - y'^2

masukkan nilai y' = 2x dan x' = -2y :

-2y = 2 + 2x – $(2x)^2$
y = -1 – x + $2x^2$ → y = $2x^2$ - x – 1

Jawabannya adalah E

17. Setiap awal tahun Budi menyimpan modal sebesar Rp 1.000.000,00 pada suatu bank dengan bunga majemuk 15% per tahun. Jumlah modal tersebut setelah akhir tahun kelima adalah ....

A . Rp 1.000.000,00 .$(1{,}15)^5$

B . Rp 1.000.000,00 . $\frac{(1.15^5 - 1)}{0.15}$

C . Rp 1.000.000,00 . $\frac{(1.15^4 - 1)}{0.15}$

D . Rp 1.150.000,00 . $\frac{(1.15^5 - 1)}{0.15}$

E. Rp 1.000.000,00 . $\frac{(1.15^4 - 1)}{0.15}$

Jawab:

Rumus bunga majemuk :

$M_n = M_0 (1 + p)^n$

M_n = modal setelah n tahun
M_0 = modal awal
p = suku bunga
n = tahun

Diketahui M_0 = 1.000.000
p = 15% per tahun = 0.15
n = 5

M_n = 1.000.000. $(1 + 0.15)^5$ = 1000.000 $(1.15)^5$

Jawabannya adalah A

18. Hasil dari $\int_0^1 3x\sqrt{3x^2+1}.dx$ adalah =….

A. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

E. $\frac{2}{3}$

Jawab:
Misal $u = 3x^2 + 1$
$du = 6x\,dx$

$$\int_0^1 3x\sqrt{3x^2+1}.dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}.du$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} .\{ \frac{2}{3}(3x^2+1) . \sqrt{3x^2+1} \ \}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \{ \frac{2}{3} . 4 . \sqrt{4} - \frac{2}{3} . 1 . 1 \}$$

$$= \frac{1}{2} . \{ \frac{16}{3} - \frac{2}{3} \} = \frac{1}{2} . \frac{14}{3}$$

$$= \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Jawabannya adalah C

19. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}$ =…..

A. -2 C. 1 E. 4
B. 0 D. 2

Jawab:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}} \frac{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x.(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2x})}{(1-2x)-(1-2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x.(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2x})}{-4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-2x}) = -(\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0}) = -2$$

Jawabannya adalah A

20. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{2x^3}$ =…..
.

A. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ E. 3
B. $\frac{2}{3}$ D. 2

Jawab:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{2x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x(1 - \cos 2x)}{2x^3}$$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$\quad = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$
$\quad = 1 - 2\sin^2 A$
$2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x(2\sin^2 x)}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x . \sin^2 x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x.}{x} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{x} = 3 . 1. 1 = 3$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}}$$

Jawabannya adalah E

21. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam, dengan biaya per jam (4x - 800 + $\frac{120}{x}$) ratus ribu rupiah . Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu ....

A . 40 jam C . 100 jam E. 150 jam
B . 60 jam D.. 120 jam

Jawab:

Biaya yang diperlukan = B = biaya per jam x waktu

$= (4x - 800 + \frac{120}{x}). x$

$= 4x^2 - 800x + 120$

Agar biaya minimum turunan $B' = 0$

$B' = 8x – 800 = 0$

$8x = 800$

$x = 100$

Jawabannya adalah C

22. Persamaan gerak suatu partikel dinyatakan dengan rumus x = f(t) = $\sqrt{3t+1}$ (s dalam meter dan t dalam detik). Kecepatan partikel pada saat t = 8 detik adalah ....

A . $\frac{3}{10}$ m/detik C. $\frac{3}{2}$ m/detik E. 5 ,/detik

B . $\frac{3}{5}$ m/detik D. 3 m/detik

Jawab:

s = f(t) = $\sqrt{3t+1}$ = $(3t+1)^{\frac{1}{2}}$

kecepatan = v = f '(t) = $\frac{1}{2}$ $(3t+1)^{-\frac{1}{2}}$. 3 = $\frac{3}{2\sqrt{3t+1}}$

f '(8) = $\frac{3}{2\sqrt{3.8+1}}$ = $\frac{3}{2\sqrt{25}}$ = $\frac{3}{10}$

Jawabannya adalah A

23. Turunan dari F(x) = $\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$ adalah F '(x) = ...

A . $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}$ $(3x^2 + 5x)\sin(3x^2 + 5x)$

B . $\frac{2}{3}$ $(6x + 5)\cos^{-\frac{1}{3}}$ $(3x^2 + 5x)$

C . - $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}$ $(3x^2 + 5x)\sin(3x^2 + 5x)$

D . - $\frac{2}{3}$ $(6x + 5)\tan(3x^2 + 5x)$ $\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$

E . $\frac{2}{3}$ $(6x + 5)\tan(3x^2 + 5x)$ $\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$

Jawab:

F(x) = $\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$ = $\cos^{\frac{2}{3}}(3x^2+5x)$

$$F'(x) = \frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}.(3x^2+5x)(-\sin(3x^2+5x))(6x+5)$$

$$= -\frac{2}{3}(6x+5)\frac{\sin(3x^2+5x)}{\cos^{\frac{1}{3}}(3x^2+5x)}\quad\frac{\cos(3x^2+5x)}{\cos(3x^2+5x)}$$

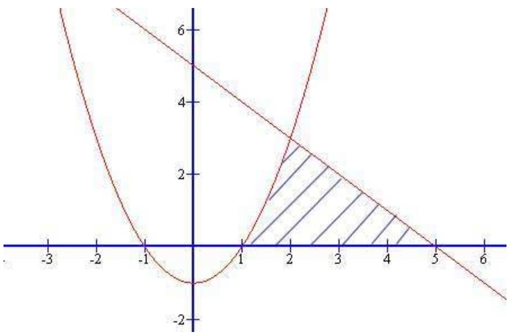
$$= -\frac{2}{3}(6x+5)\frac{\sin(3x^2+5x)}{\cos(3x^2+5x)}\quad\frac{\cos(3x^2+5x)}{\cos^{\frac{1}{3}}(3x^2+5x)}$$

$$= -\frac{2}{3}(6x+5)\tan(3x^2+5x)\ \cos^{\frac{2}{3}}(3x^2+5x)$$

$$= -\frac{2}{3}(6x+5)\tan(3x^2+5x)\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$$

Jawabannya adalah D

24. Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah ....



A. $4\frac{1}{2}$ satuan luas

B. $5\frac{1}{6}$ satuan luas

C. $5\frac{5}{6}$ satuan luas

D. $13\frac{1}{6}$ satuan luas

E. $30\frac{1}{6}$ satuan luas

Jawab:
Persamaan parabola:
titik puncak = (0, -1)

$y = a(x - x_p)^2 + y_p$
$= a(x - 0)^2 - 1$
$= ax^2 - 1$

Melalui titik (1, 0) → x = 1; y = 0
0 = a – 1

a = 1

persamaan parabola

$y = x^2 - 1$

persamaan garis: ax +by = ab

Melalui titik (5,0) dan (0,5)
b a

$5x + 5y = 25 \rightarrow x + y = 5$
$y = 5 - x$

perpotongan parabola dan garis:

$x^2 - 1 = 5 - x$
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$x = -3$; $x = 2$
yang berlaku pada daerah yang diarsir adalah x = 2

L = L1 + L2

$$L1 = \int_2^5 (5-x)dx = 5x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_2^5$$

$$= 5(5-2) - \frac{1}{2}(25-4) = 15 - \frac{21}{2} = \frac{9}{2}$$

$$L2 = \int_1^2 (x^2-1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(8-1) - (2-1) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{7-3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$L = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{27+8}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6} \text{ satuan luas}$$

Jawabannya adalah C

25. Hasil dari $\int \cos^5 x dx = \ldots$

A . $-\frac{1}{6}\cos^6 x \sin x + C$

B . $\frac{1}{6}\cos^6 x \sin x + C$

C . $-\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

D . $-\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

E. $\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

Jawab:

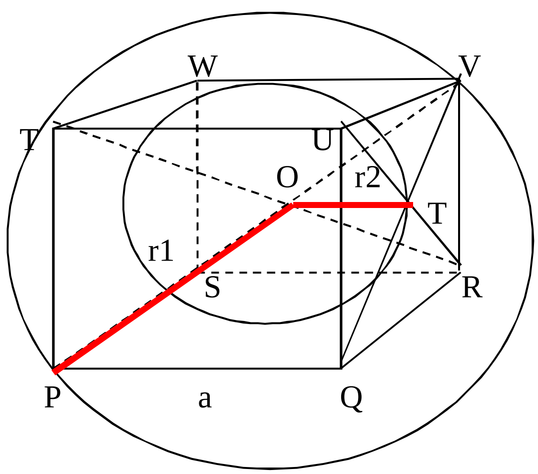
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x dx &= \int \cos x \cos^4 x dx \\ &= \int \cos x(\cos^2 x)^2 dx \\ &= \int \cos x(1-\sin^2 x)^2 dx \\ &= \int \cos x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)dx \\ &= \int \cos x dx - 2\int \cos x \sin^2 x dx + \int \cos x \sin^4 x dx \\ &= \int d \sin x - 2\int \sin^2 x d\sin x + \int \sin^4 x d \sin x \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

Jawabannya adalah E

26. Pada kubus PQRS.TUVW dengan panjang rusuk a satuan, terdapat bola luar dinyatakan B_1 dan bola dalam dinyatakan B_2. Perbedaan Volume bola B_1 dan bola B_2 adalah ....

A . $3\sqrt{3}$: 1 C . $\sqrt{3}$: 1 E. 2 : 1
B . $2\sqrt{3}$: 1 D. 3 : 1

Jawab:



Jari jari bola dalam = r2 = OT= $\frac{1}{2}PQ$

$= \frac{1}{2}a$

PV = panjang diagonal ruang

$= a\sqrt{3}$

Jari jari bola luar = r1 = OP= $\frac{1}{2}$ PV = $\frac{1}{2}$ $a\sqrt{3}$

Volume bola dalam $B_2 = \frac{4}{3}\pi . r2^3$

Volume bola luar $B_1 = \frac{4}{3}\pi . r1^3$

Perbedaan Volume bola B_1 dan bola B_2 adalah:

$\frac{4}{3}\pi . r1^3 : \frac{4}{3}\pi . r2^3 = . r1^3 : . r2^3$

$= (\frac{1}{2} a\sqrt{3})^3 : (\frac{1}{2} a)^3$

$= \frac{1}{8} a^3 . 3\sqrt{3} : \frac{1}{8} a^3 = 3\sqrt{3} : 1$

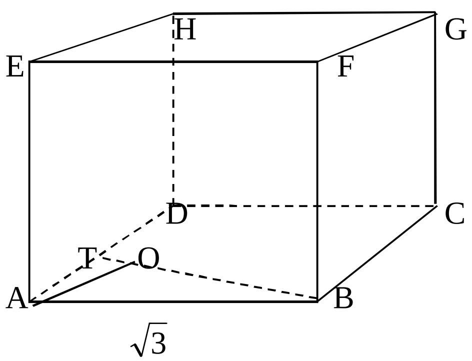
Jawabannya adalah A

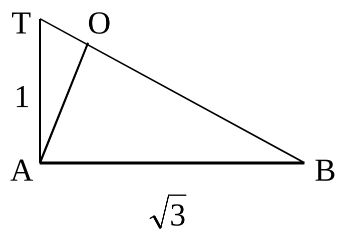
27. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk $\sqrt{3}$ cm dan T pada AD dengan panjang AT = 1 cm. Jarak A pada BT adalah ....

A . $\frac{1}{2}$ cm C . $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm E. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm

B . $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ cm D. 1 cm

Jawab:





BT = $\sqrt{AB^2 + AT^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Luas Δ ABT = $\frac{1}{2}$ AB . AT = $\frac{1}{2}$ BT. AO

$\frac{1}{2} . \sqrt{3} . 1 = \frac{1}{2} . 2 . AO$

$\sqrt{3} \quad = 2\ AO$

$AO = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

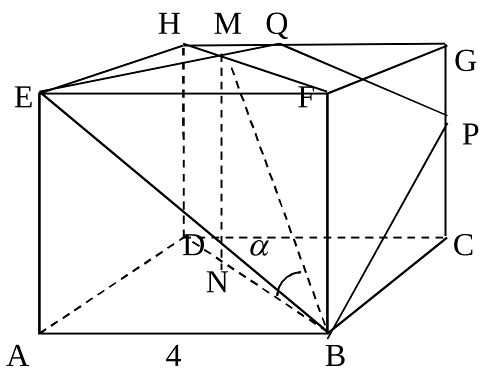
Jawabannya adalah C

28. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 4 cm. Titik P dan Q masing-masing terletak pada pertengahan CG dan HG. Sudut antara BD dan bidang BPQE adalah α , nilai tan α = …

A. $\frac{3}{8}\sqrt{2}$.   C. $\sqrt{2}$ E. 2 $\sqrt{2}$

B. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Jawab:



Tan α = $\frac{MN}{BN}$

MN = 4

MH = titik berat = $\frac{1}{3}HF$

FM= BN = (1 - $\frac{1}{3}$) HF = $\frac{2}{3}$ HF = $\frac{2}{3}$. 4 . $\sqrt{2}$; (HF = diagonal bidang = $4\sqrt{2}$)

$= \frac{8}{3}\sqrt{2}$

Tan α = $\frac{MN}{BN} = \frac{4}{\frac{8}{3}\sqrt{2}} = \frac{12}{8\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{16} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

Jawabannya adalah B

29. Tanah seluas 10.000 m² akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A diperlukan 100 m² dan tipe B diperlukan 75 m². Jumlah rumah yang dibangun paling

banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp 6.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp 4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah ....

A . Rp 550.000.000,00
B . Rp 600.000.000,00
C . Rp 700.000.000,00
D . Rp 800.000.000,00
E . Rp 900.000.000,00

Jawab:

misal:
x = rumah tipe A
y = rumah tipe B

$100x + 75y \leq 10.000 \Rightarrow$ dibagi 25 $\rightarrow$ $4x + 3y \leq 400$ …..(1)
$x + y \leq 125$ …..(2)
Keuntungan maksimum : 6000.000 x + 4000.000 y =…?

Mencari keuntungan maksimum dengan mencari titik-titik pojok dengan menggunakan sketsa grafik:

Grafik 1 :

$4x + 3y \leq 400$

titik potong dengan sumbu X jika y=0 maka $x = \frac{400}{4} = 100$

Titik potongnya (100 , 0)

Titik potong dengan sumbu Y jika x = 0 maka $y = \frac{400}{3} = 133,3$

Titik potongnya (0 , 133,3)

Grafik 2 :

$x + y \leq 125$

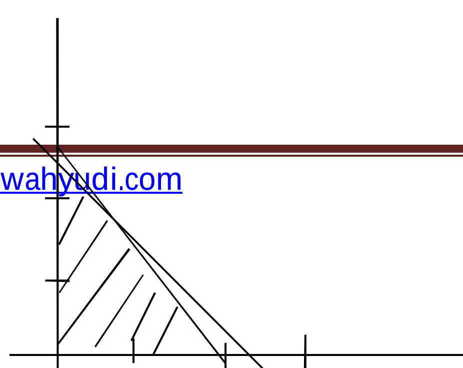
titik potong dengan sumbu X jika y=0 maka x = 125

Titik potongnya (125 , 0)

Titik potong dengan sumbu Y jika x = 0 maka y = 15

Titik potongnya (0 , 125)

Gambar grafiknya:



125 133,3

titik potong

100 125

titik potong :

eliminasi x

$4x + 3y = 400 \quad x\ 1 \Rightarrow \quad 4x + 3y = 400$

$\underline{x + y \;\; = 125 \quad x\ 4 \Rightarrow \quad 4x + 4y = 500 \;\; -}$

$-y = -100$

$y = 100$

$x + y = 125$

$x = 125 - y$

$= 125 – 100 = 25$ → didapat titik potong (25, 100)

Titik pojok	6000.000 x + 4000.000 y
(100,0)	600.000.000
(0,125)	500.000.000
(25, 100)	150.000.000+ 400.000.000 = 550.000.000

Keuntungan maksimum adalah Rp.600.000.000

Jawabannya adalah B

30. Diketahui premis-premis berikut :
    1. Jika Budi rajin belajar maka ia menjadi pandai.
    2. Jika Budi menjadi pandai maka ia lulus ujian.
    3. Budi tidak lulus ujian.

    Kesimpulan yang sah adalah ....

    A . Budi menjadi pandai
    B . Budi rajin belajar
    C . Budi lulus ujian
    D . Budi tidak pandai
    E . Budi tidak rajin belajar

    Jawab:

    p = Budi rajin belajar
    q = Budi menjadi pandai
    r = Budi lulus ujian
    ~r = Budi tidak lulus ujian

$p \Rightarrow q$ (1) $p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$ $\quad \underline{q \Rightarrow r}$ modus silogisme

$\sim r$ $\quad \therefore\ p \Rightarrow r$

$\therefore$?

(2) $p \Rightarrow r$

$$\begin{array}{l} \quad p \Rightarrow r \\ \underline{\quad\quad \sim r} \\ \therefore \sim p \end{array} \quad \text{modus Tollens}$$

Jadi kesimpulannya adalah ~p = Budi tidak rajin belajar

Jawabannya adalah E