Soal-Soal dan Pembahasan Matematika IPA SNMPTN 2009

1. Jika a, b $\geq$ 0, maka pernyataan di bawah ini yang benar adalah…

   A. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ C. $\sqrt{ab} \leq \frac{ab}{2}$ E. $\sqrt{ab} \leq ab$

   B. $\sqrt{ab} \leq \sqrt[b]{a}$ D. $\sqrt{ab} \geq \sqrt[b]{a}$

   Jawab:
   karena pada jawaban terdapat $\sqrt{ab}$ maka selesaikan soal sbb:

   $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
   $\Leftrightarrow$ a + b – 2 $\sqrt{ab} \geq 0$
   $\Leftrightarrow$ a + b $\geq$ 2 $\sqrt{ab}$
   $\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
   $\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

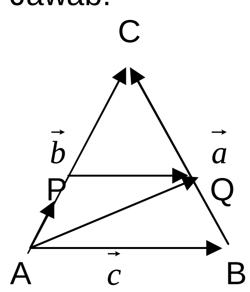
   Jawabannya adalah A

2. Diketahui segitiga ABC. Titik P di tengah AC dan Q pada BC, sehingga BQ = QC. Jika $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ dan $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, maka $\overrightarrow{PQ}$ = ….

   A. $\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$ C. $\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c})$ E. $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})$

   B. $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ D. $\frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c})$

   Jawab:



$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$$
$$= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$$
$$= (\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}) - (\frac{1}{2}\vec{b})$$
$$= \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$
$$= (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$
$$= \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

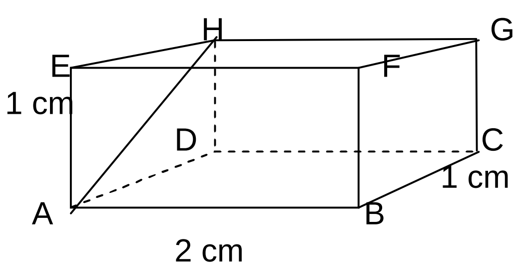
Jawabannya adalah A

3. Diberikan balok ABCD.EFGH dengan AB = 2cm, 2BC = 2cm, 2AE = 2cm. Panjang AH adalah……

A. $\frac{1}{2}$ cm
B. 1 cm
C. $\sqrt{2}$ cm
D. 2 cm
E. $\sqrt{3}$ cm

Jawab:

2BC = 2cm → BC = 1 cm, 2AE = 2cm → AE = 1 cm



AH = $\sqrt{AD^2 + DH^2}$

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2}$ cm

Jawabannya adalah C

4. Jika pada integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ dx disubstitusikan $\sqrt{x}$ = sin y, maka menghasilkan :

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 x \;\; dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$

C. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \;\; dx$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y \;\; dy$

E. $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \;\; dx$

Jawab:

$\sqrt{x}$ = sin y → dikuadratkan
x = $\sin^2$ y

dx = 2 sin y cos y dy

batas integral:

untuk x = 0 maka :

$\sqrt{0}$ = sin y
0 = sin y → y = 0

untuk x = $\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ = sin y

$\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ = sin y

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = sin y

y = 45^0 = $\frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ dx

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\, 2 \sin y \cos y \, dy \; ;$$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{\cos^2 y}}\, 2 \sin y \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y}\, 2 \sin y \cos y \, dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 x dx$$

Jawabannya adalah C

5. Misalkan U_n menyatakan suku ke n suatu barisan geometri. Jika diketahui U_5 = 12 dan log U_4 + log U_5 - log U_6 = log 3, maka nilai U_4 adalah …

A. 12
B. 10
C. 8
D. 6
E. 4

Jawab:

barisan geometri:

U_4, U_5, U_6 → U_5 = 12
log U_4 + log U_5 - log U_6 = log 3
ditanya U_4 = ..?

r = $\frac{U_6}{U_5} = \frac{U_6}{12}$ → U_6 = 12r

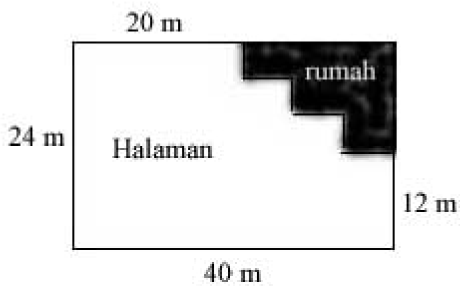
log U_4 + log U_5 - log U_6 = log 3
log U_4 + log U_5 = log 3 + log U_6
log U_4 . U_5 = log 3 . U_6
U_4 . U_5 = 3 . U_6
12 . U_4 = 3 . 12r
U_4 = $\frac{36r}{12}$ = 3r

U_5 = U_4 . r
U_5 = 3r. r
12 = $3r^2$
r^2 = 4
r = 2

U_4 = 3 .r = 3. 2 = 6

Jawabannya adalah D

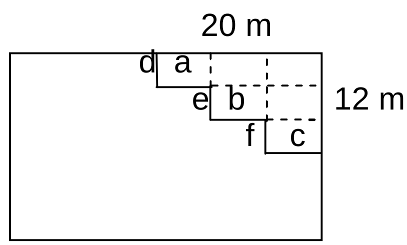
6. Suatu rumah dibangun pada sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan lebar 24 m dan panjang 40 m seperti pada gambar berikut.



Keliling bangunan rumah tersebut adalah…..

A. 30 m
B. 32 m
C. 40 m
D. 56 m
E. 64 m

Jawab:



a + b + c = 20 m
d + e + f = 12 m

keliling rumah = 20 m + 12 m + (a + b+c)+(d+e+f)
= 20 m + 12 m + 20 m + 12 m = 64 m

Jawabannya adalah E

7. Diketahui fungsi f dan g dengan f(x) = x^2 + 4x + 1 dan $g'(x) = \sqrt{10 - x^2}$ dengan g' menyatakan turunan pertama fungsi g. Nilai turunan pertama $g \circ f$ di x = 0 adalah

A. 3
B. 6
C. 9
D. 12
E. 15

Jawab:

$f(x) = x^2 + 4x + 1$

$f'(x) = 2x + 4$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \, . \, f'(x)$

$= \sqrt{10 - (x^2 + x + 1)^2} \, .(2x+4)$

untuk x = 0

$(g \circ f)'(x) = \sqrt{10 - (0 + 0 + 1)^2} \, .(0+4)$

$= \sqrt{10 - 1} \, . \, 4 = \sqrt{9} \, . \, 4 = 3 \, . \, 4 = 12$

Jawabannya adalah D

8. Diberikan fungsi f memenuhi persamaan 3 f(-x) + f(x-3) = x + 3 untuk setiap bilangan real x. Nilai 8 f(-3) adalah …..

A. 24	C. 20	E. 15
B. 21	D. 16	

Jawab:

untuk x = 0 :

3 f(-0) + f(-3) = 3 …..(1)

untuk x = 3 :

3 f(-3) + f(0) = 6 ……(2)

dari (1) dan (2) :

$$\begin{array}{lll} 3 f(0) + f(-3) = 3 & \times 1 \Rightarrow & 3 f(0) + f(-3) = 3 \\ f(0) + 3 f(-3) = 6 & \times 3 \Rightarrow & \underline{3 f(0) + 9f(-3) = 18} \ - \\ & & -8 f(-3) = -15 \\ & & 8 f(-3) = 15 \end{array}$$

Jawabannya adalah E

9. Jika $f(3x+2) = x\sqrt{x+1}$ dan f' adalah turunan pertama fungsi f, maka $12 f'(11) = …$

A. 9	C. 12	E. 15
B. 11	D. 14	

Jawab:

f(3x+2) = x $\sqrt{x+1}$

f(3x+2) = $\sqrt{x^3+x^2}$ = $(x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

3 . f ' (3x+2) = $\frac{1}{2}(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = $\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

agar f ' (3x+2) menjadi f ' (3x+2) maka x = 3

untuk x = 3 :

3 f ' (11) = $\frac{3.9+2.3}{2\sqrt{27+9}}$ = $\frac{33}{2\sqrt{36}}$ = $\frac{33}{12}$

12 f ' (11) = $\frac{33}{3}$ = 11

Jawabannya adalah B

10. Jika f(x) = x^2 , maka luas daerah yang dibatasi kurva y = 4 – f(x), y = 4 - f(x-4) dan garis y = 4 adalah…..

A. 12

B. $\frac{16}{3}$

C. 5

D. 4

E. $\frac{11}{3}$

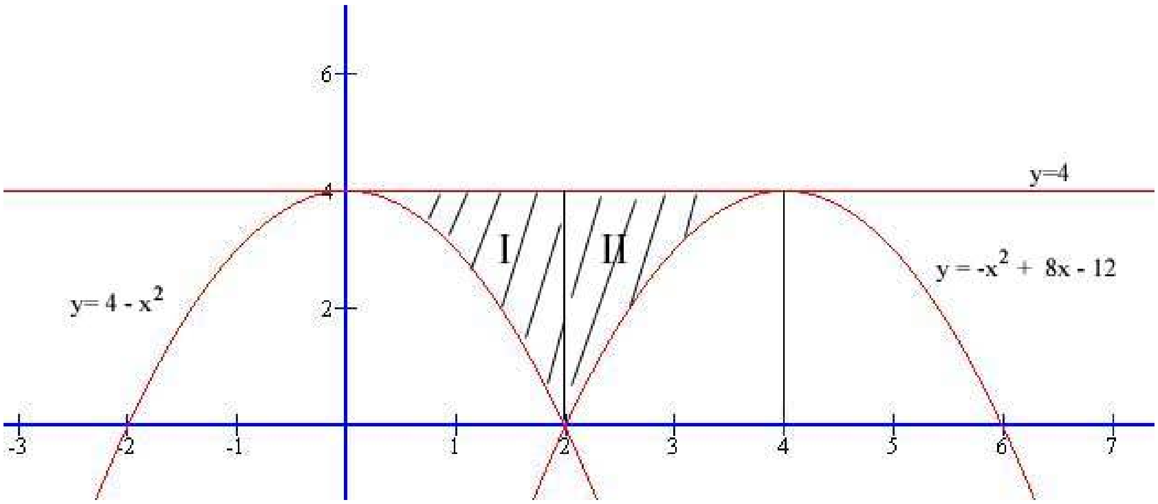
Jawab:

f(x) = x^2

Kurva:
* y = 4 – f(x) → y = 4 - x^2
* y = 4 - f(x-4) → y = 4 – $(x-4)^2$
= 4 – (x^2 - 8x + 16)
= - x^2 + 8x – 12

* garis y = 4

grafik :



L = L I + L II

$$= \int_0^2 \{4-(4-x^2)\}dx + \int_2^4 \{4-(-x^2+8x-12)\}dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x^2-8x+16)\}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 + (\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x)\Big|_2^4$$

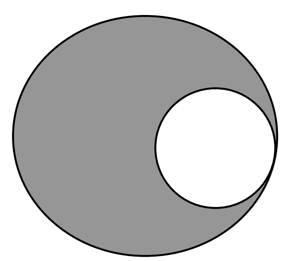
$$= \frac{1}{3}2^3 + (\frac{1}{3}(4^3-2^3) - 4(4^2-2^2) + 16(4-2)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{56}{3} - 48 + 32 = \frac{64}{3} - 16$$

$$= \frac{64-48}{3} = \frac{16}{3}$$

Jawabannya adalah B

11. Luas daerah yang diarsir pada lingkaran besar adalah 4 kali luas daerah lingkaran kecil. Jika jari-jari lingkaran besar adalah $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$, maka keliling lingkaran kecil adalah ….



A. $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ C. $2\sqrt{5\pi}$ E. $5\sqrt{2\pi}$

B. $\sqrt{5\pi}$ D. $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$

Jawab:

Luas lingkaran = $\pi\, r^2$
Keliling = $2\pi\, r$

ditanya keliling lingkaran kecil = …?

misal:

Lb = Luas Lingkaran besar
Lk = Luas Lingkaran kecil
rb = jari-jari lingkaran besar = $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$
rk = jari-jari lingkaran kecil

Lb – Lk = 4 Lk
Lb = 5 Lk

$\pi\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 5\,\pi\, rk^2$

$\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 5\, rk^2$

$\frac{25}{\pi} = 5\, rk^2$

$rk^2 = \frac{25}{5\pi} = \frac{5}{\pi}$

$rk = \sqrt{\frac{5}{\pi}}$

keliling lingkaran kecil = $2\pi\sqrt{\frac{5}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{5\pi^2}{\pi}} = 2\sqrt{5\pi}$

Jawabannya adalah C

12. Jika $F\left(\frac{6}{\sqrt{4+\sin^2 x}}\right) = \tan x$, $\pi \le x \le 2\pi$, maka F(3) = ….

A. 0	C. $\frac{\pi}{2}$	E. 2π
B. 1	D. π	

Jawab:

$F\left(\frac{6}{\sqrt{4+\sin^2 x}}\right)$ = F(3)

$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{\sqrt{4+\sin^2 x}}\right)$ = 3

$\Leftrightarrow \sqrt{4+\sin^2 x} = \frac{6}{3}$ = 2 ; dikuadratkan

$\Leftrightarrow$ 4 + $\sin^2 x$ = 4

$\Leftrightarrow$ $\sin^2 x$ = 0

x = π

maka:

$F\left(\frac{6}{\sqrt{4+\sin^2 x}}\right)$ = tan x

$F\left(\frac{6}{\sqrt{4+\sin^2 \pi}}\right)$ = tan π

F(3) = $\frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1}$ = 0

Jawabannya adalah A

13. Salah satu faktor suku banyak $x^3 + kx^2 + x - 3$ adalah $x - 1$. Faktor yang lain adalah ….

A. $x^2 + 3x + 3$
B. $x^2 + x - 3$
C. $x^2 + 3x - 3$
D. $x^2 + 2x + 3$
E. $x^2 - 7x + 3$

Jawab:

Metoda Horner

x -1 → x = 1

$$\begin{array}{c|cccc} x = 1 & 1 & k & 1 & -3 \\ & & 1 & k+1 & k+2 \\ \hline & 1 & k+1 & k+2 & k-1 \end{array}$$

$k - 1$ → sisa

k – 1 = 0 → k = 1

sehingga faktor yang lainnya adalah : $x^2 + (k+1)x + k + 2$

k = 1 → $x^2 + 2x + 3$

Jawabannya adalah D

14. Diberikan tiga pernyataan:

1. Jika $\int_a^b f(x)dx \geq 1$, maka f(x) ≥ 1 untuk semua x dalam [a,b]

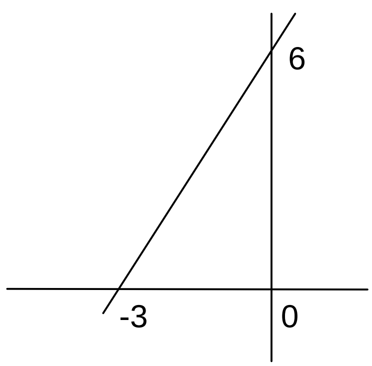
2. $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2009} < \frac{1}{3}$

3. $\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^{2009} x dx = 0$

A. 1 dan 2
B. 1 dan 3
C. 2 dan 3
D. 1, 2 dan 3
E. Tidak ada

Jawab:

1. Misal persamaan garis sembarang : f(x) =2x + 6



$\int_a^b f(x)dx = \int_{-3}^{0} (2x+6)dx = x^2 + 6x \Big|_{-3}^{0}$ = -9 + 6(0+3) = 9 ≥ 1

apakah benar f(x) ≥ 1 untuk semua x dalam [a,b]

untuk x dalam [-3,0]

untuk x = -3 → y = 0
untuk x = 0 → y = 6

hasilnya → $0 \leq$ f(x) ≤ 6 → syarat tidak berlaku

ternyata pernyataannya salah

2. merupakan deret geometri dengan a = $\frac{1}{4}$; r = $\frac{1}{4}$ dan n = 2009

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ untuk r <1}$$

$$S_{2009} = \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^{2009})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^{2009}) \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{4})^{2009}) < \frac{1}{3}$$

pernyataan benar

3. $\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^{2009} x dx = 0$

dengan n = 2009 dan n$\geq$ 2 gunakan rumus reduksi:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x \Big|_{-3\pi}^{3\pi} + \frac{n-1}{n}\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^{n-2} x dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^{n-2} x dx$$

maka :

$$\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin^{2009} x dx = \frac{2008}{2009} x \frac{2006}{2008} x \frac{2004}{2006} x ... x \frac{2}{3}\int_{-3\pi}^{3\pi} \sin x dx$$

$$= \frac{2008}{2009} x \frac{2006}{2008} x \frac{2004}{2006} x ... x \frac{2}{3} . (-\cos x) \Big|_{-3\pi}^{3\pi}$$

$$= \frac{2008}{2009} x \frac{2006}{2008} x \frac{2004}{2006} x ... x\ 0 = 0$$

pernyataan benar

Jawabannya adalah C

15. Fungsi f(x) = $\frac{12}{1-2\cos 2x}$ dalam selang 0 < x < 2π mencapai nilai maksimum a pada beberapa titik x_1. Nilai terbesar a + $\frac{4x_1}{\pi}$ adalah…

A. 13
B. 15
C. 16
D. 18
E. 20

Jawab:

f(x) = $\frac{12}{1-2\cos 2x}$ = 12 (1-2cos2x) $^{-1}$

syarat mencapai nilai maksimum jika f $'$(x) = 0

f $'$(x) = -12(1 – 2cos2x) $^{-2}$. 4 sin2x

= $-\frac{48.\sin 2x}{(1-2\cos 2x)^2}$ = 0

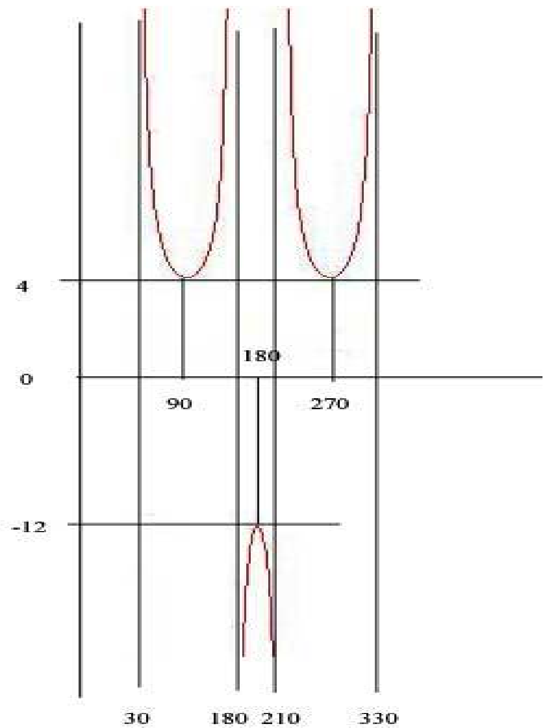
sin 2x = 0
2x = 0 + k . 2π
x = k. π

atau sin 2x = 180
2x = 180 + k . 2π
x = 90 + k. π

untuk k = 0 didapat: x = 90
untuk k = 1 didapat x = 180 dan 270

x	f(x) = $\frac{12}{1-2\cos 2x}$
90	4
180	-12
270	4

grafik:



terlihat bahwa - 12 adalah nilai maksimum berarti a = -12

didapat x_1 = 180 atau π sehingga nilai terbesar a + $\frac{4x_1}{\pi}$ adalah:

-12 + $\frac{4.\pi}{\pi}$ = -12 + 4 = -8

Tidak ada jawaban yang tepat