

Kompetensi 2 (Bagian 2)

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

PERSAMAAN KUADRAT

Bentuk Umum:

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

Pengertian:

$x = \alpha$ adalah akar-akar persamaan

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

Cara Menyelesaikan Persamaan Kuadrat:

1. Memfaktorkan:

$ax^2 + bx + c = 0$ diuraikan menjadi

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ atau diubah menjadi}$$

$$\text{bentuk } \frac{1}{a}(ax + p)(ax + q)$$

dengan $p + q = b$ dan $pq = ac$

dengan demikian diperoleh

$$x_1 = -\frac{p}{a} \text{ dan } x_2 = -\frac{q}{a}$$

2. Melengkapkan kuadrat sempurna (mempunyai akar yang sama)

$$(x \pm p)^2 = x^2 \pm 2p + p^2$$

3. Menggunakan rumus abc

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Menentukan Jenis Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Menggunakan Diskriminan (D)

$$D = b^2 - 4ac$$

1. $D > 0$

Kedua akar nyata dan berlainan ($x_1 \neq x_2$)

2. $D = 0$

Mempunyai akar yang sama ($x_1 = x_2$)

3. $D < 0$

akar tidak nyata

4. $D = k^2$; $k^2 =$ bilangan kuadrat sempurna kedua akar rasional

Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Rumus-rumus yang lain:

$$1. \quad x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$2. \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$3. \quad x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$4. \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1x_2)(x_1 + x_2)$$

$$5. \quad x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 - 3(x_1x_2)(x_1 - x_2)$$

$$6. \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

Menyusun Persamaan Kuadrat

Rumus Persamaan Kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

FUNGSI KUADRAT

Bentuk Umum:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dan $a, b, c \in \mathbb{R}$

Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

1. Tentukan titik potong dengan sumbu x ($y = 0$)
2. Tentukan titik potong dengan sumbu y ($x = 0$)
3. Tentukan titik puncak/Ekstrim :

yaitu $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$

4. a. Apabila $a > 0$ grafik terbuka ke atas

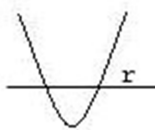


- b. Apabila $a < 0$ grafik terbuka ke bawah

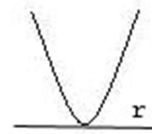


Kedudukan Garis r terhadap grafik fungsi kuadrat:

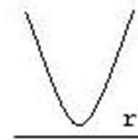
1. $D > 0$
Berpotongan di dua titik



2. $D = 0$
Menyinggung grafik (mempunyai satu titik potong)



3. $D < 0$
Garis tidak menyinggung dan memotong (terpisah)



Menentukan Persamaan Fungsi Kuadrat:

1. Jika diketahui titik puncak (x_p, y_p)
gunakan rumus: $y = a(x - x_p)^2 + y_p$
2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu x ($y = 0$)
yakni $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

Gunakan rumus: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. Jika yang diketahui selain poin 2 dan 3 maka
gunakan rumus: $y = ax^2 + bx + c$

Dari $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh :

1. Penyebab ekstrim $x = -\frac{b}{2a}$
2. Nilai ekstrim $y_{eks} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$$y_{eks} = y_{\min} \text{ jika } a > 0$$

$$y_{eks} = y_{\max} \text{ jika } a < 0$$

Contoh Soal :

Soal UN TH 2010 – 2012

UN 2010

1. Grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + bx + 4$ menyinggung garis $y = 3x + 4$. Nilai b yang memenuhi adalah

- A. -4 C. 0 E. 4
B. -3 D. 3

Jawab:

Substitusikan persamaan fungsi kuadrat dan persamaan garis:

$$x^2 + bx + 4 = 3x + 4$$

$$x^2 + bx - 3x + 4 - 4 = 0$$

$$x^2 + x(b - 3) = 0$$

grafik fungsi kuadrat menyinggung garis apabila $D = 0$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$= (b - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$(b - 3)^2 = 0$$

$$b - 3 = 0$$

$$b = 3$$

Jawabannya adalah D

UN 2010

2. Akar – akar persamaan $x^2 + (2a-3)x + 18 = 0$ adalah p dan q . Jika $p = 2q$, untuk $p > 0$, $q > 0$. Nilai $a - 1 = \dots$

- A. -5 C. 2 E. 4
B. -4 D. 3

Jawab:

$$p \cdot q = \frac{c}{a} = 18 ; p = 2q$$

$$2q \cdot q = 18$$

$$2q^2 = 18$$

$$q^2 = 9$$

$q = \pm 3$: karena $p > 0$, $q > 0$ maka $q = 3$
 $p \cdot q = 18 \rightarrow p \cdot 3 = 18$

$$p = \frac{18}{3} = 6$$

$$p + q = -\frac{b}{a} = -\frac{2a - 3}{1} = -2a + 3$$

$$6 + 3 = -2a + 3$$

$$9 = -2a + 3$$

$$2a = 3 - 9$$

$$2a = -6$$

$$a = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{maka: } -3 - 1 = -4$$

Jawabannya adalah B

UN2010

3. Jika p dan q adalah akar – akar persamaan kuadrat $x^2 - 5x - 1 = 0$, maka persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$ adalah

- A. $x^2 + 10x + 11 = 0$ C. $x^2 - 10x + 11 = 0$ E. $x^2 - 12x - 7 = 0$
B. $x^2 - 10x + 7 = 0$ D. $x^2 - 12x + 7 = 0$

Jawab:

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$p + q = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$$

$$p \cdot q = \frac{c}{a} = -1$$

Persamaan Kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x_1 = 2p + 1 ; x_2 = 2q + 1 \rightarrow \text{masukkan nilai-nilai tsb}$$

$$x^2 - (2p + 1 + 2q + 1)x + (2p + 1)(2q + 1) = 0$$

$$x^2 - (2p + 2q + 2)x + (4pq + 2p + 2q + 1) = 0$$

$$x^2 - 2(p + q + 1)x + 4pq + 2(p + q) + 1 = 0$$

$$x^2 - 2(5 + 1)x + (4 \cdot (-1) + 2(5) + 1) = 0$$

$$x^2 - 12x - 4 + 10 + 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 7 = 0$$

Jawabannya adalah D

UN2011

4. Akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah α dan β .
Persamaan Kuadrat baru yang akar-akarnya
($\alpha + 2$) dan ($\beta + 2$) adalah

- A. $3x^2 - 24x + 38 = 0$ C. $3x^2 - 24x - 38 = 0$
E. $3x^2 - 24x - 24 = 0$
B. $3x^2 + 24x + 38 = 0$ D. $3x^2 - 24x + 24 = 0$

Jawab:

Persamaan Kuadrat:

$$3x^2 - 12x + 2 = 0$$

$$a = 3, b = -12 \text{ dan } c = 2$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{3} = 4; \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \rightarrow$$

Rumus Persamaan Kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 (α dan β) adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

untuk yang akar-akarnya ($\alpha + 2$) dan ($\beta + 2$) adalah:

$$x^2 - ((\alpha + 2) + (\beta + 2))x + (\alpha + 2) \cdot (\beta + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\alpha + \beta + 4)x + (\alpha \cdot \beta + 2(\alpha + \beta) + 4) = 0, \text{ masukkan nilai-nilai di atas}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4 + 4)x + \left(\frac{2}{3} + 2 \cdot 4 + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + \frac{38}{3} = 0 \rightarrow \text{dikalikan 3}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 38 = 0$$

Jawabannya adalah A

UN2011

5. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + mx + 16 = 0$ adalah α dan β . Jika $\alpha = 2\beta$ dan α, β positif, maka nilai m adalah....

- A. -12 B. -6 C. 6 D. 8 E. 12

Jawab:

Persamaan kuadrat

diketahui $a = 2$; $b = m$ dan $c = 16$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{2}; \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\alpha = 2\beta \rightarrow \alpha \cdot \beta = 8$$

$$2\beta^2 = 8$$

$$\beta^2 = 4$$

$$\beta = \pm 2 \text{ karena } \alpha, \beta \text{ positif maka nilai } \beta = 2$$

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}m$$

$$3\beta = -\frac{1}{2}m$$

$$3 \cdot 2 = -\frac{1}{2}m \rightarrow 6 = -\frac{1}{2}m \rightarrow m = -12$$

Jawabannya adalah A

UN2011

6. Grafik $y = px^2 + (p+2)x - p + 4$ memotong sumbu x di dua titik. Batas-batas nilai p yang memenuhi adalah.....

- A. $p < -2$ atau $p > -\frac{2}{5}$ C. $p < 2$ atau $p > 10$ E. $2 < p < 10$
B. $p < \frac{2}{5}$ atau $p > 2$ D. $\frac{2}{5} < p < 2$

Jawab:

Persamaan dan Fungsi Kuadrat

Syarat grafik memotong sumbu x di dua titik adalah $D > 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$y = px^2 + (p+2)x - p + 4; \text{ dimana } a = p; b = p + 2; c = -p + 4$$

$$D > 0$$

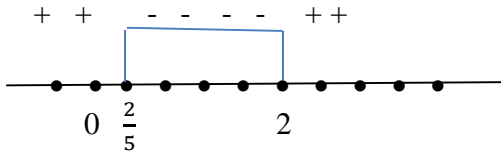
$$(p + 2)^2 - 4 \cdot p \cdot (-p + 4) > 0$$

$$p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 16p > 0$$

$$5p^2 - 12p + 4 > 0$$

$$(5p - 2)(p - 2) > 0$$

$$p = \frac{2}{5} \text{ atau } p = 2$$



terlihat pada gambar yang > 0 bertanda ++ yaitu $p < \frac{2}{5}$ atau $p > 2$

Jawabannya adalah B

UN2012

7. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah p dan q . Jika $p^2 - 2pq + q^2 = 8a$, maka nilai $a = \dots$
- A. -8 B. -4 C. 4
D. 6 E. 8

Jawab:

$$x^2 + ax - 4 = 0 \rightarrow a = 1; b = a; c = -4$$

$$p + q = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{1} = -a; p \cdot q = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = 8a$$

$$(p + q)^2 - 2pq - 2pq = 8a \rightarrow (p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq)$$

$$(p + q)^2 - 4pq = 8a$$

$$(-a)^2 - 4 \cdot (-4) = 8a$$

$$a^2 + 16 = 8a$$

$$a^2 - 8a + 16 = 0$$

$$(a - 4)(a - 4) = 0$$

$$a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

Jawabannya C

UN2012

8. Persamaan kuadrat $x^2 + (m-2)x + 2m - 4 = 0$ mempunyai akar-akar real, maka batas nilai m yang memenuhi adalah....
- A. $m \leq 2$ atau $m \geq 10$ D. $2 < m < 10$
B. $m \leq -10$ atau $m \geq -2$ E. $-10 \leq m \leq -2$
C. $m < 2$ atau $m > 10$

Jawab:

BAB III Persamaan dan Fungsi Kuadrat

mempunyai akar-akar real maka $D \geq 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$(m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 4) \geq 0$$

$$m^2 - 4m + 4 - (8m - 16) \geq 0$$

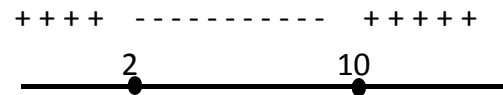
$$m^2 - 4m + 4 - 8m + 16 \geq 0$$

$$m^2 - 12m + 20 \geq 0$$

$$(m - 10)(m - 2) \geq 0$$

nilai batas $m = 10$ dan $m = 2$

$$(m - 10 = 0 \rightarrow m = 10; m - 2 = 0 \rightarrow m = 2)$$



didapat nilai $m \geq 10$ atau $m \leq 2$

Jawabannya A