

LIMIT FUNGSI

Pengertian :

Jika hasil substitusi langsung adalah tertentu, maka hasil tersebut adalah hasil akhir, tetapi jika hasilnya tak tentu maka gunakan teorema limit.

Limit Fungsi Aljabar

1. Bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ dapat diselesaikan dengan 2 cara :

a. Memfaktorkan :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f(x)}{(x-a)g(x)}$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)}{1} \\ &= \frac{2(1+1)}{1} = 4 \end{aligned}$$

b. L'Hospital
pembilang dan penyebut didiferensialkan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

Contoh :

Penyelesaian di atas dapat juga diselesaikan dengan cara L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{1} = \frac{4 \cdot 1}{1} = 4$$

(turunan $2x^2 - 2$ adalah $4x$; turunan $x-1$ adalah 1)

2. Bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ dapat diselesaikan dengan rumus :

a. membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi penyebut

Contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2+x-12} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{3}{x}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} \\ &= \frac{0-0}{1+0-0} = 0 \end{aligned}$$

Bentuk soal tersebut adalah seperti berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} + \dots}$$

Jika $m = 0$ hasilnya $\frac{a}{p}$

Jika $m > n$ hasilnya ∞

Jika $m < n$ hasilnya 0

maka dapat langsung dijawab dengan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2+x-12} = 0 \rightarrow \text{karena pangkat pembilang} < \text{pangkat penyebut}$$

3. Untuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, Jika $f(x)$ atau $g(x)$ merupakan bentuk akar, maka $f(x)$ atau $g(x)$ dikalikan dengan sekawan $f(x)$ atau sekawan $g(x)$.

Rumus lain:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + px + q} \right) = \frac{b-p}{2\sqrt{a}} ;$$

berlaku jika konstanta kuadratnya sama (nilai a sama)

Contoh: $\lim_{x \rightarrow \sim} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + 2x + 11}) =$

Diketahui : $a = 1, b = -2, p = 2$

$$\frac{b-p}{2\sqrt{a}} = \frac{-2-2}{2\sqrt{1}} = \frac{-4}{2} = -2$$

Fungsi Irasional:

Jika menemui pembilang atau penyebut mengandung bentuk $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ maka bentuk tersebut disubstitusikan.

Contoh :
$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

Limit Fungsi Trigonometri :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 ax}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin ax}{x} \cdot \frac{\sin ax}{x} = 2 \cdot a \cdot a = 2a^2$$

catatan:

$$\cos 2ax = \cos^2 ax - \sin^2 ax$$

$$\cos^2 ax + \sin^2 ax = 1$$

$$\cos 2ax = 1 - \sin^2 ax - \sin^2 ax$$

$$= 1 - 2 \sin^2 ax$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin k(x-a)}{x-a} = k$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan k(x-a)}{x-a} = k$$

Contoh Soal:

UN2010-UN2012

UN2010

1. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}} \right) = \dots$

- A. -2 C. 1 E. 4
B. 0 D. 2

Jawab:

Rasionalisasikan penyebut

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}} \right) &= \frac{4x(\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x})}{(\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x})(\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 4x \left(\frac{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}{1-2x - (1+2x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 4x \left(\frac{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}{-4x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -(\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}) = -(\sqrt{1} + \sqrt{1}) = -2 \end{aligned}$$

Jawabannya adalah A

UN2010

2. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x - \sin 2x}{6} \right) = \dots$

- A. 1 C. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{6}$
B. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x - \sin 2x}{6} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{6} - \frac{\sin 2x}{6} \right) \\ &= \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jawabannya adalah D

UN2011

3. Nilai $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} = \dots$

- A. 0 B. 4 C. 8 D. 12 E. 16

Jawab:

Limit Fungsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}\sqrt{x}+2}{\cancel{x-4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4 \end{aligned}$$

Jawabannya adalah B

UN2011

4. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x} = \dots$

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$ E. 1

Jawab :

Limit Fungsi

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2x \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{2x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 2x} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jawabannya adalah D

UN2012

5. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3-\sqrt{9+x}} = \dots$

- A. -30 B. -27 C. 15 D. 30 E. 36

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3-\sqrt{9+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3-\sqrt{9+x}} \cdot \frac{3+\sqrt{9+x}}{3+\sqrt{9+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot (3+\sqrt{9+x})}{9-(9+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot (3+\sqrt{9+x})}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -5 \cdot (3+\sqrt{9+x}) \\ &= -5 \cdot (3+\sqrt{9}) \\ &= -5 \cdot 6 = -30 \end{aligned}$$

Jawabannya A

UN2012

6. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan 2x} = \dots$

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 2

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-2 \sin^2 x)}{x \tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin x}{x \tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\tan 2x} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 ; \frac{\sin x}{\tan 2x} = \frac{1}{2}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Jawabannya D