MATRIKS

Pengertian:

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang diatur pada baris dan kolom dan letaknya di antara dua buah kurung.

A. Operasi Matriks :

2 baris dan 2 kolom

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

Baris →

↓ kolom

disebut matriks berordo 2x2

1. Penjumlahan

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

2. Pengurangan

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

3. Perkalian

a. Perkalian skalar

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

b. Perkalian matriks dengan matriks

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

B. Kesamaan dua buah Matriks :

A = B

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = p, & b = q \\ c = r, & d = s \end{matrix}$$

C. Determinan Matriks :

1. Matriks ordo 2 x 2

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

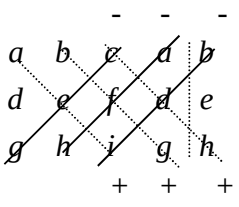
Maka det(A) = |A| = ad – bc → jika det(A) = 0 maka matriks A disebut matriks **singular**

2. Matriks ordo 3 x 3

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Maka det(A) = |A| = aei + bfg + cdh – gec – hfa – idb

diagram :



arah negatif

arah positif

D. Invers Matriks :

- Jika A.B = I ; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka A dan B dikatakan saling invers

- Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

E. Transpose Matriks :

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

A^t didapat dari mengubah kedudukan baris menjadi kolom dari matriks A

F. Persamaan Matriks :

Jika A.B = C maka

1. $A = C \cdot B^{-1}$
2. $B = A^{-1} \cdot C$

(urutan huruf diperhatikan !!)

G. Sifat-sifat Operasi Matriks :

1. A + B = B + A (sifat komutatif)
2. A . B ≠ B. A
3. A. (B. C) = (A . B) . C (sifat asosiatif)
4. (A + B) + C = A + (B + C)
5. A + O = O + A ; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. A + (-A) = 0
7. A – B = A + (-B)
8. $(A^{-1})^{-1} = A$
9. $(A^t)^t = A$
10. $(A.B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
11. $(A.B)^t = B^t \cdot A^t$
12. $A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
13. $A^2 = A \cdot A$
    $A^3 = A \cdot A^2$
    $A^4 = A \cdot A^3$
    .
    .
    .
    ↓
    $A^n = A. A^{n-1}$

Contoh Soal:

Soal UN2010 – UN2012

UN2010

1. Diketahui persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$$

Perbandingan nilai x dan y adalah ….

A. 3 : 1 C. 2 : 1 E. 1 : 1

B. 1 : 3 D. 1 : 2

Jawab:

$$\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$$

piih dua posisi yang bisa menyelesaikan masalah

(perkalian matrik):

4(x-5)+ 4.2 = 0

4x – 20 + 8 = 0

4x – 12 = 0

4x = 12

x = 3

-5 . -1 + 2 (y-1) = 5

5 + 2y – 2 = 5

2y + 3 = 5

2y = 2

y = 1

perbandingan nilai x dan y = 3 : 1

Jawabannya adalah A

UN2011

2. Diketahui persamaan matriks :

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nilai x – y = ...

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{15}{2}$ C. $\frac{19}{2}$

D. $\frac{22}{2}$ E. $\frac{23}{2}$

Jawab:

Matriks.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5.2+ -2x & 5.(-1)+-2(x+y) \\ 9.2+ -4x & 9.(-1)+ -4(x+y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10-2x & -5-2x-2y \\ 18-4x & -9-4x-4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$10 - 2x = 1$ $\quad$ $-5 - 2x - 2y = 0$

$2x = 9$ $\quad$ $-5 - 2(\frac{9}{2}) = 2y$

$x = \frac{9}{2}$ $\quad$ $-14 = 2y$

$y = -7$

maka $x - y = \frac{9}{2} - (-7) = \frac{9}{2} + \frac{14}{2} = \frac{23}{2}$

Jawabannya adalah E

UN2011

3. Diketahui Matriks $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -17 & 0 \end{pmatrix}$. Jika A^T = Transpose matriks A dan $AX = B + A^T$, maka determinan matriks X = ...

A. -5 B. -1 C. 1 D. 5 E. 8

Jawab:

Matriks

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$AX = B + A^T$

$= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -17 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$

AX = C → X = A^{-1} . C

X = $\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & -1\\ -15 & 5\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & -1\\ -15 & 5\end{pmatrix}$

= $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}30 & -15\\ -45 & 15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

det(x) = 2.1 – (-1 . -3) = 2 – 3 = - 1

Jawabannya adalah B

UN2012

4. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix}3 & y\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}x & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ dan C = $\begin{pmatrix}-3 & -1\\ y & 9\end{pmatrix}$

Jika A + B – C = $\begin{pmatrix}8 & 5x\\ -x & -4\end{pmatrix}$, maka nilai x + 2xy + y adalah...

A. 8 B. 12 C. 18
D. 20 E. 22

Jawab:
BAB XIX Matriks

A + B – C = $\begin{pmatrix}3 & y\\ 5 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3 & -1\\ y & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 5x\\ -x & -4\end{pmatrix}$

3 + x – (-3) = 8
x = 8 – 3 -3 = 2

5 – 3 – y = -x
2 – y = - 2
y = 2 + 2 = 4

Maka nilai x + 2xy + y = 2 + 2.2.4 + 4 = 2 + 16 + 4 = 22
Jawabannya E