

PROGRAM LINEAR

Pengertian Program Linear :

Program Linear adalah bagian ilmu matematika terapan yang digunakan untuk memecahkan masalah optimasi (pemaksimalan atau peminimalan suatu tujuan) yang dapat digunakan untuk mencari keuntungan maksimum seperti dalam bidang perdagangan, penjualan dsb

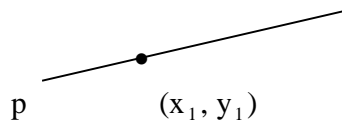
Daerah Penyelesaian:

Dalam penyelesaian persoalan program linear adalah pemahaman dalam pembuatan grafik pertidaksamaan linear yaitu penentuan daerah himpunan penyelesaian dari suatu system pertidaksamaan linear.

Yang perlu diingat dalam pembuatan grafik pertidaksamaan linear ini yaitu mengenai persamaan garis.

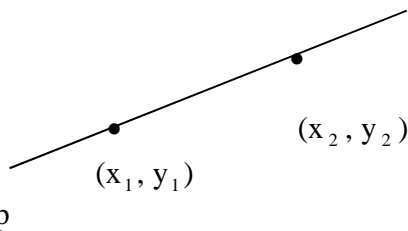
1. Persamaan garis melalui suatu titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$



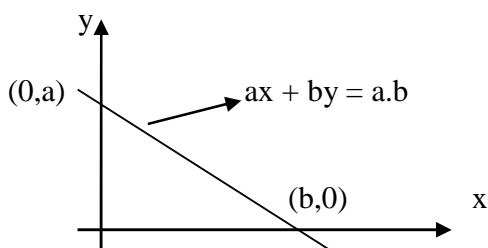
2. Persamaan garis melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



3. Persamaan garis lurus yang memotong sumbu x ($y=0$) di titik $(b,0)$ dan memotong sumbu y ($x=0$) di titik $(0, a)$ adalah:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by = a.b$$



Bukti : $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by = a.b$

Gunakan persamaan 2 di atas :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis melalui $(b,0) \rightarrow (x_1, y_1)$
dan $(0, a) \rightarrow (x_2, y_2)$

$$\frac{y - 0}{a - 0} = \frac{x - b}{0 - b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{a} = \frac{x - b}{-b}$$

$$\Leftrightarrow -by = a(x - b)$$

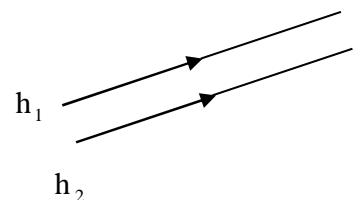
$$\Leftrightarrow -by = ax - ab$$

$$\Leftrightarrow ab = ax + by$$

$$\Leftrightarrow ax + by = ab \rightarrow \text{terbukti}$$

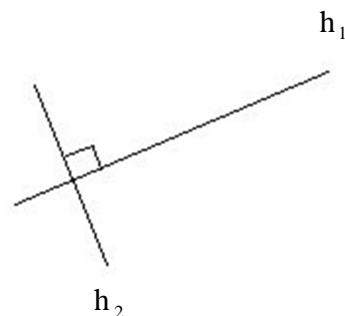
4. Dua gradien sama apabila dua garis saling sejajar.

$$m_1 = m_2$$

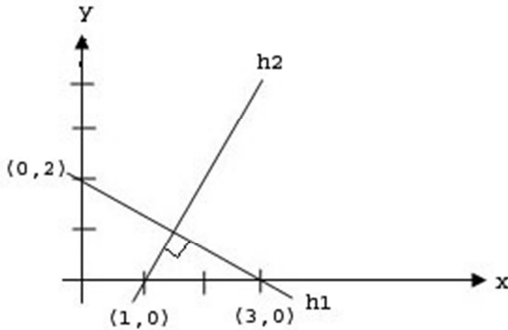


5. Hasil perkalian dua gradien adalah -1 apabila dua garis saling tegak lurus

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$



Contoh:
Tentukan persamaan garis dari gambar di bawah ini :



garis h1 melalui (3,0) dan (0,2) ;
garis h1 \perp h2 dan melalui (1,0).

persamaan garis h1 (gunakan rumus $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad | \times 6 |$$

$$\text{persamaan garis h1} \Rightarrow 2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

persamaan garis h2 :

h1 \perp h2 sehingga $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_1 = -\frac{2}{3} \text{ maka } m_2 = \frac{3}{2}$$

melalui (1,0)

$$(y - y_1) = m_2 (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{2} (x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2} (x - 1)$$

$$2y = 3x - 3$$

persamaan garis h2 adalah $3x - 2y = 3$

Menentukan Sistem Pertidaksamaan Linear:

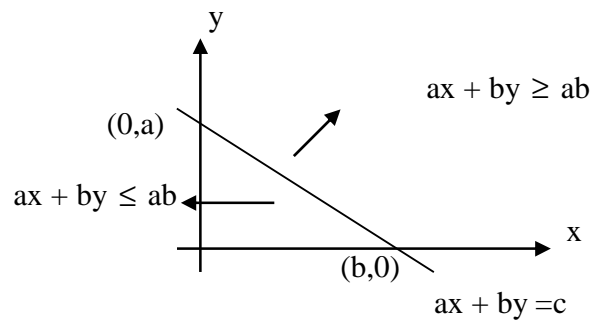
Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dapat dilakukan dengan menggunakan metoda grafik dan uji titik.

Langkah-langkahnya ($ax + by \geq c$) yaitu :

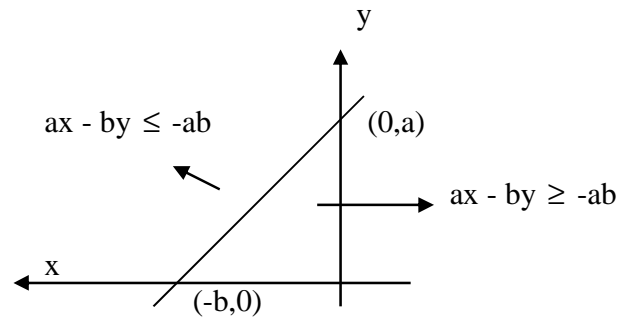
1. Gambar garis $ax + by = c$
2. Lakukan uji titik dengan menentukan titik sembarang (x,y) yang terletak di luar garis $ax + by = c$, kemudian substitusikan ke dalam persamaan $ax + by \geq c$.
 - a. Jika benar, maka himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik tersebut dengan batas garis $ax + by = c$
 - b. Jika salah, titik tersebut bukan himpunan penyelesaiannya

Tanpa melakukan uji titik himpunan penyelesaian pertidaksamaan dapat dilihat dari gambar berikut dimana garis membagi bidang menjadi 2 bagian :

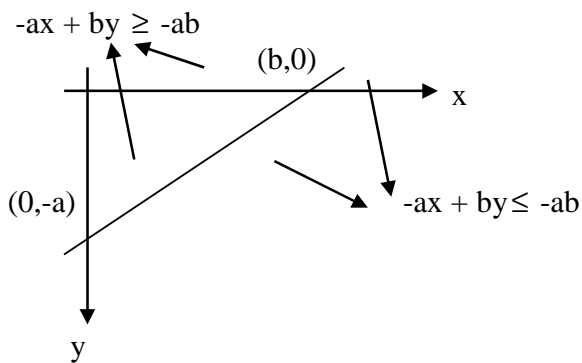
untuk $a > 0$ dan $b > 0$



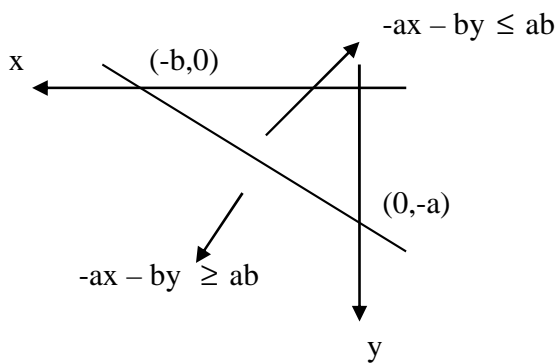
untuk $a > 0$ dan $b < 0$



Untuk $a < 0$ dan $b > 0$



Untuk $a < 0$ dan $b < 0$



Contoh:

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan :

$$2x + 3y \leq 6 ; 4x + 2y \leq 8 ; x \geq 0 ; y \geq 0$$

untuk x dan $y \in \mathbb{R}$

jawab:

Langkah 1:

gambar persamaan $2x + 3y \leq 6$

Buat garis $2x + 3y = 6$

titik potong dengan sb x jika $y=0 \rightarrow 2x = 6$
 $x = 3$

titik potong dengan sb y jika $x = 0 \rightarrow 3y = 6$
 $y = 2$

didapat koordinat $(3,0)$ dan $(0,2)$

Langkah 2 :

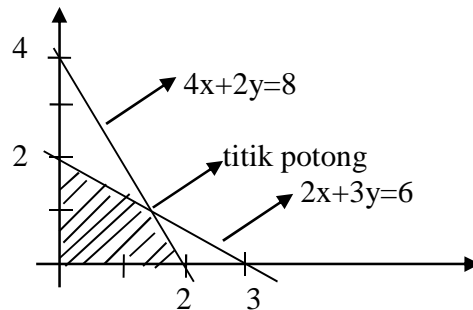
gambar persamaan $4x + 2y \leq 8$

Buat garis $4x + 2y = 8$

titik potong dengan sb x jika $y=0 \rightarrow 4x = 8$
 $x = 2$

titik potong dengan sb y jika $x = 0 \rightarrow 2y = 8$
 $y = 4$

didapat koordinat $(2,0)$ dan $(0,4)$



Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian, ujilah titik $(0,0)$. Titik $(0,0)$ memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \leq 6 ; 4x + 2y \leq 8 ; x \geq 0 ; y \geq 0$, maka $(0,0)$ merupakan anggota himpunan penyelesaian.

Daerah yang diarsir menunjukkan himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan linear.

Tambahan:

Titik potong dua persamaan adalah:

Substitusikan persamaan 1 dan 2 :

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \quad | \times 4 | \Rightarrow 8x + 12y = 24 \\ 4x + 2y = 8 \quad | \times 2 | \Rightarrow 8x + 4y = 16 \quad - \\ \hline 8y = 8 \\ y = 1 \end{array}$$

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3 \cdot 1 = 6$$

$$x = 1 \frac{1}{2}$$

titik potongnya adalah $(1 \frac{1}{2}, 1)$

Nilai Optimum (Maksimum dan Minimum) dalam daerah penyelesaian

Untuk menentukan nilai optimum dalam daerah penyelesaian, dapat ditentukan dengan menggunakan metode titik pojok (titik ekstrim) atau garis selidik.

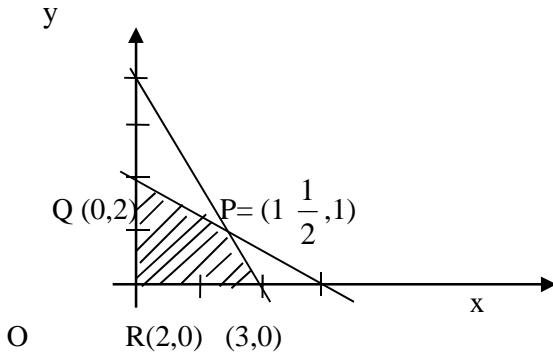
Contoh:

Jika diketahui system pertidaksamaan

$2x + 3y \leq 6 ; 4x + 2y \leq 8 ; x \geq 0 ; y \geq 0$ untuk x dan $y \in \mathbb{R}$,

Tentukan nilai optimum untuk $A = x + 3y$ dan $B = 2x + 5y$ dimana $x, y \in \mathbb{R}$ nilai maksimum dari A adalah 6, minimum adalah 0 nilai maksimum dari B adalah 10, minimum adalah 0

Jawab:



titik P merupakan titik potong garis

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \quad | \times 4 | \Rightarrow 8x + 12y = 24 \\ 4x + 2y = 8 \quad | \times 2 | \Rightarrow 8x + 4y = 16 \quad - \\ \hline 8y = 8 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ 2x + 3 \cdot 1 = 6 \\ x = 1 \frac{1}{2} \end{array}$$

titik potongnya adalah titik P $(1 \frac{1}{2}, 1)$

Daerah yang diarsir merupakan himpunan penyelesaian dari system pertidaksamaan. Titik-titik ekstrimnya adalah P $(1 \frac{1}{2}, 1)$, Q(0,2), R(2,0) dan O(0,0).

Tabel.

Titik	O	P	Q	R
X	0	$1 \frac{1}{2}$	0	2
Y	0	1	2	0
$A=x+3y$	0	$4 \frac{1}{2}$	6	2
$B=2x+5y$	0	8	10	4

dari tabel dapat disimpulkan bahwa :

Model Matematika

Model matematika adalah penerjemahan dari situasi yang disajikan dalam bahasa sehari-hari menjadi bahasa matematika (pertidaksamaan linear)

Contoh:

Tempat parkir di suatu gedung mempunyai luas $800m^2$, untuk memarkir sebuah mobil diperlukan tempat seluas $10m^2$ dan untuk suatu bus atau truk diperlukan tempat seluas $20m^2$. Tempat parkir tersebut maksimal hanya dapat menampung tidak lebih dari 50 mobil dan bus. Jika ongkos parkir untuk mobil adalah Rp.2000,- dan untuk bus/truk Rp.4000,- berapa ongkos maksimal parkir yang didapat ?.

Jawab:

langkah 1 : buat model matematika dalam bentuk table

Jenis	Luas	Banyak
Mobil	10	X
Bus	20	Y
Tersedia	800	50

Diperoleh model matematika:

$$\begin{array}{r} 10x + 20y \leq 800 \Leftrightarrow x + 2y \leq 80 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

fungsi tujuannya adalah $f(x,y)=2000x + 5000y$ dengan syarat-syarat di atas.

Langkah 2: menggambar daerah penyelesaian

Daerah 1 $\rightarrow x + 2y = 80$

X	0	80
Y	40	0
Titik	(0,40)	(80,0)

daerah 2 $\rightarrow x + y = 50$

X	0	50
Y	50	0

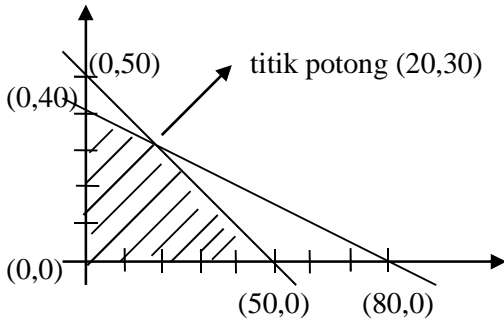
Titik	(0,50)	(50,0)
-------	--------	--------

Titik potong garis $x + 2y = 80$ dan $x + y = 50$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 80 \\ x + y = 50 \quad - \\ \hline y = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ x = 50 - 30 = 20 \end{array}$$

titik potongnya (30,20)



Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaiannya

Langkah 3 : Menentukan nilai optimum fungsi tujuannya

Dengan menggunakan metoda titik-titik sudut :
Terdapat 4 titik sudut yaitu (0,0), (50,0), (20,30) dan (0,40)

Titik	(0,0)	(50,0)	(20,30)	(0,40)
X	0	50	20	0
Y	0	0	30	40
$2000x+4000y$	0	100.000	160.000	160.000

Jadi ongkos maksimal yang didapat adalah Rp.160.000 dengan jumlah parkir untuk mobil sebanyak 20 mobil dan untuk bus/truk sebanyak 30 bus/truk

catatan:
nilai untuk titik (0,40) jumlahnya sama dengan untuk (20,30) tetapi tidak mungkin satu lahan parkir hanya digunakan untuk bus/truk saja sehingga nilai tersebut diabaikan.

Contoh Soal:

Soal UN2010 – UN2012

UN2010

1. Suatu perusahaan memproduksi barang dengan 2 model yang dikerjakan dengan dua mesin yaitu mesin A dan mesin B. Produk model I dikerjakan dengan mesin A selama 2 jam dan mesin B selama 1 jam. Produk model II dikerjakan dengan mesin A selama 1 jam dan mesin B selama 5 jam. Waktu kerja mesin A dan B berturut – turut adalah 12 jam perhari dan 15 jam perhari. Keuntungan penjualan produk model I sebesar Rp. 40.000,00 perunit dan model II Rp 10.000,00 per unit.

Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah

- A. Rp. 120.000,00 D. Rp. 300.000,00
 B. Rp. 220.000,00 E. Rp. 600.000,00
 C. Rp. 240.000,00

Jawab:

Misal produk model I = x
 produk model II = y

	A	B
produk model I	x	2
produk model II	y	1
waktu kerja	12	15

ditanya keuntungan maksimum : $40.000x + 10.000y = \dots?$

Dibuat model matematikanya:

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; 2x + y \leq 12 ; x + 5y \leq 15$$

buat grafiknya:

$$2x + y = 12$$

titik potong dengan sb x jika $y=0 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$;

didapat titik (6,0)

titik potong dengan sb y jika $x=0 \rightarrow y = 12$

didapat titik (0,12)

Tarik garis dari titik (6,0) ke titik (0,12)

$$x + 5y = 15$$

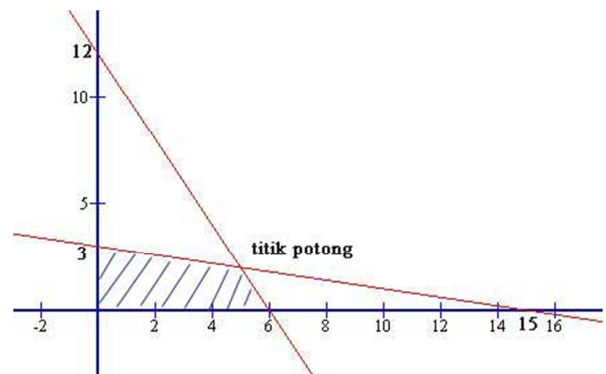
titik potong dengan sb x jika $y=0 \rightarrow x = 15$;

didapat titik (15,0)

titik potong dengan sb y jika $x=0 \rightarrow 5y = 15 \rightarrow y = 3$;

didapat titik (0, 3)

Tarik garis dari titik (15,0) ke titik (0,3)



titik potong 2 garis tersebut adalah:

substitusikan 2 persamaan tsb:

eliminasi x

$$2x + y = 12 \quad x1 \Rightarrow 2x + y = 12$$

$$x + 5y = 15 \quad x2 \Rightarrow 2x + 10y = 30 \quad -$$

$$-9y = -18$$

$$y = 2$$

$$2x + y = 12$$

$$2x + 2 = 12$$

$$2x = 12 - 2$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

titik potongnya adalah (5,2)

dibuat tabel dengan titik-titik pojok:

titik pojok	$40.000x + 10.000y$
(0, 0)	0
(0, 3)	30.000
(5, 2)	$200.000 + 20.000 = 220.000$
(6, 0)	240.000

Terlihat bahwa nilai maksimumnya adalah 240.000 di titik (6, 0)

Jawabannya adalah C

UN2011

2. Seorang anak diharuskan minum dua jenis tablet setiap hari. Tablet jenis I mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B. Tablet jenis II mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam 1 hari anak tersebut memerlukan 25 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet I Rp. 4.000,00 per biji dan tablet II Rp. 8.000,00 per biji, pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per hari adalah....

- A. Rp. 12.000,00 C. Rp. 16.000,00 E. Rp. 20.000,00
- B. Rp. 14.000,00 D. Rp. 18.000,00

Jawab:

Misal:

tablet jenis I = x ; tablet jenis II = y
 Vitamin A = 5 vitamin A (tablet jenis I) + 10 Vitamin A (tablet jenis II) = 25 keperluan vitamin A perhari
 $= 5x + 10y = 25 \dots(1)$

Vitamin B = 3 vitamin B (tablet jenis I) + 1 Vitamin A (tablet jenis II) = 5 keperluan vitamin A perhari
 $= 3x + y = 5 \dots(2)$

Perpotongan antara (1) dan (2) didapat dengan substitusi dengan eliminasi (1) dan (2):

$$5x + 10y = 25 \quad \times 3 \implies 15x + 30y = 75$$

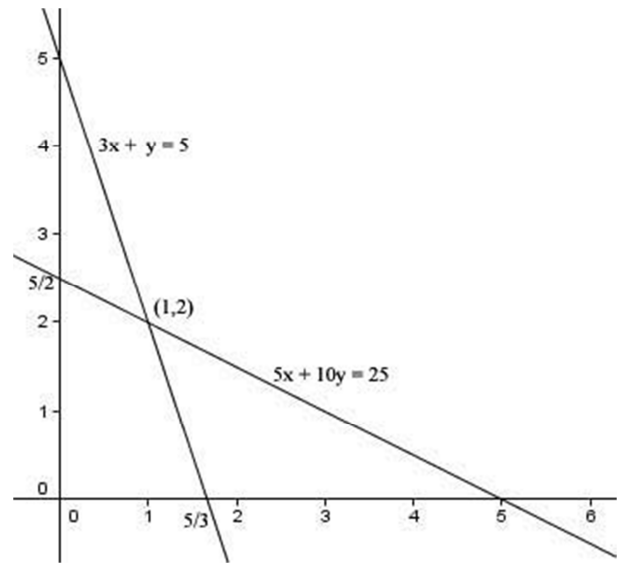
$$3x + y = 5 \quad \times 5 \implies \frac{15x + 5y = 25}{25y = 50}$$

$$y = 2$$

$$3x + y = 5$$

$$3x = 5 - y$$

$$x = \frac{5-y}{3} = \frac{3}{3} = 1$$



$f(x,y) = 4000x + 8000y$
 dari gambar terlihat 3 titik ji coba yaitu $(\frac{5}{3}, 0)$, (1,2) dan $(0, \frac{5}{2})$

x	y	$f(x,y) = 4000x + 8000y$
$\frac{5}{3}$	0	6.666
1	2	20.000
0	$\frac{5}{2}$	20.000

yang berlaku adalah yang meliputi adanya x dan Y (tablet I dan II) yaitu titik (1,2) sehingga pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per hari adalah Rp.20.000,-

Jawabannya adalah E

