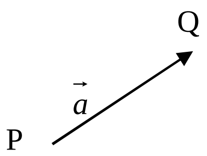
VEKTOR

A Definisi Vektor :
Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mempunyai titik pangkal P dan titik ujung Q.



B. Beberapa pengertian vektor :

1. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.

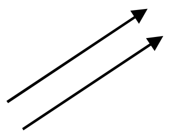
   Jika A(x,y,z) maka $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan

   $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Vektor satuan adalah suatu vektor panjangnya satu. Vektor arah sumbu x, sumbu y dan sumbu z berturut-turut adalah :

   $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Vektor posisi adalah suatu vektor yang titik awalnya di 0.
   Dua buah vektor dikatakan sama jika kedua vektor itu mempunyai besar dan arah yang sama.



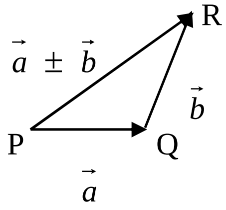
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{matrix}$$

C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan dan pengurangan vektor

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

untuk penjumlahan :



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

2. Perkalian skalar dengan vektor

$$\text{k } \vec{a} = \text{k} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

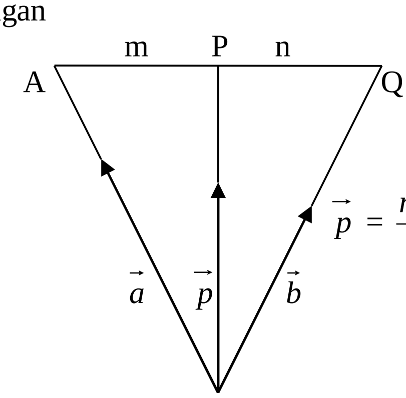
3. Besar atau panjang vektor

a. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$

b. Jika P (a_1, a_2, a_3) dan Q (b_1, b_2, b_3) maka

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)}$$

4. Perbandingan

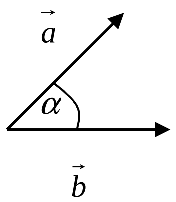


$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

$\vec{a}$, $\vec{p}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor posisi dari titik A, B dan P

D. Perkalian Skalar dua Vektor

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha$$



α menyatakan sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

E. Besar sudut antara dua Vektor

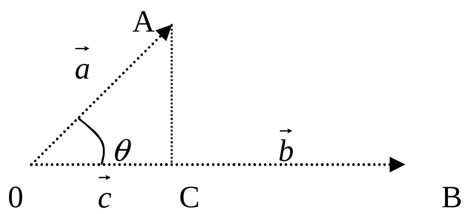
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}.\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}} \;;\; 0 \le \alpha \le 180^0$$

F. Proyeksi Ortogonal suatu vektor pada vektor :

Salah satu kegunaan dari perkalian scalar adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vector lain

1. Proyeksi skalar ortogonal



$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$ → Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Proyeksi skalar juga disebut panjang proyeksi

2. Proyeksi vektor ortogonal

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right).\,\vec{b}$$

Proyeksi vektor juga disebut vector poyeksi

G. Rumus-rumus tambahan :

1. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2}$

bukti :

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\overrightarrow{b}|\cos\alpha} \quad ....(1)$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 \quad ...(2)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2}$$
$$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a}-\vec{b}|^2}$$

2. $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2}$

bukti :

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2|\vec{a}||\overrightarrow{b}|\cos\alpha} \quad ....(1)$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - |\vec{a}+\vec{b}|^2 \quad ...(2)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - |\vec{a}+\vec{b}|^2}$$
$$= \sqrt{2(a^2 + b^2) - |\vec{a}+\vec{b}|^2}$$

Contoh Soal

Soal-soal UN2010 – UN2012

UN2010

1. Diketahui koordinat A(0,0,0), B(–1,1,0), C(1, –2,2). Jika sudut antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ adalah α maka cos α = ...

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ C. 0 E. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Jawab:

cos α = $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (–1,1,0)

$\overrightarrow{AC}$ = C – A = (1, –2,2)

cos α = $\dfrac{(-1.1)+(1.-2)+0}{\sqrt{(-1)^2+(1)+0}.\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$ = $\dfrac{-3}{\sqrt{2}.3}$

= $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ = $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ = $-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Jawabannya adalah E

UN2010

2. Diketahui titik A(3,2, –1), B(2,1,0), dan C(–1,2,3). Jika $\overrightarrow{AB}$ wakil vektor $\vec{u}$ dan $\overrightarrow{AC}$ wakil $\vec{v}$ maka proyeksi vector $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah ....

A. $\frac{1}{4}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ C. $4(\vec{j}+\vec{k})$ E. $8(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

B. $-\vec{i}+\vec{k}$ D. $4(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

Jawab:

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah :

$|\vec{c}|$ = $\left(\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$

$\overrightarrow{AB}$ = $\vec{u}$ = B – A = (2-3, 1-2 ,0 – (-1)) = (-1, -1, 1)

$\overrightarrow{AC}$ = $\vec{v}$ = C – A = (-1-3, 2-2 , 3 – (-1)) = (- 4, 0, 4)

$|\vec{c}|$ = $\left(\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$

= $\left(\dfrac{(-1.-4)+0+(1.4)}{(\sqrt{16+16})^2}\right)(-4\vec{i}+4\vec{k})$

= $\left(\dfrac{4+4}{32}\right)(-4\vec{i}-2\vec{k})$ = $\dfrac{1}{4}(-4\vec{i}+4\vec{k})$

= $\dfrac{1}{4}.4(-\vec{i}+\vec{k})$ = $-\vec{i}+\vec{k}$

Jawabannya adalah B

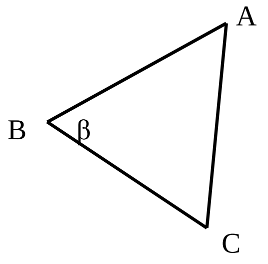
UN2011

3. Diketahui titik A (5, 1, 3), B (2, -1, -1) dan C (4, 2, -4). Besar sudut ABC adalah....

A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$ E. 0

Jawab:

Vektor dan Trigonometri



A (5, 1, 3), B (2, -1, -1) dan C (4, 2, -4)

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+1+49} = \sqrt{51}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

aturan cosinus:

$$\text{Cos } \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.AC}$$
$$= \frac{29 + 22 - 51}{2.\sqrt{29}\,\sqrt{51}} = 0$$
$$\beta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

Jawabannya adalah B

UN2011

4. Diketahui vektor $\vec{a} = 4\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$. Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah....

A. $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
D. $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
B. $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$
E. $6\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}$
C. $\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$

Jawab:

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) . \vec{b}$$

$$= \frac{(4.2 + (-2)(-6) + 2.4)}{(\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 4^2})^2} \left(2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{(8+12+8)}{(\sqrt{4+36+16})^2} \left(2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{28}{56} \left(2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right) = \frac{1}{2} \left(2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)$$
$$= \vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

Jawabannya adalah B

UN2012

5. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$, maka hasil dari ($\vec{a}$ - 2$\vec{b}$) . (3$\vec{c}$) adalah....

A. 171 B. 63 C. -63 D. -111 E. -171

Jawab:
BAB XX Vektor

$\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$ maka $\vec{a} . \vec{b} = 0$

$\begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ p. 4 + 2.(-3) + (-1).6 = 0

4p – 6 – 6 = 0
4p = 12
p = 3

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) . (3\vec{c}) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) . \left(3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -30 + (-24) + (-117)$$
$$= -30 - 24 - 117 = -171$$

Jawabannya E

UN2012

6. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah...

A. 135^0 B. 120^0 C. 90^0 D. 60^0 E. 45^0

Jawab:

$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}.\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}}$$

$$= \frac{2.3.+(-3).(-2)+(3).(-4)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}$$

$$= \frac{6.+6-12}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}} = 0$$

cos α = 0 → α = 90^0

Jawabannya C

UN2012

7. Diketahui vektor $\vec{a}$ = 5 $\vec{i}$ + 6$\vec{j}$ + $\vec{k}$ dan $\vec{b}$ = $\vec{i}$ - 2$\vec{j}$ - 2$\vec{k}$. Proyeksi orthogonal vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah....

A. $\vec{i}$ + 2$\vec{j}$ + 2$\vec{k}$ D. - $\vec{i}$ + 2$\vec{j}$ + 2$\vec{k}$

B. $\vec{i}$ + 2$\vec{j}$ - 2$\vec{k}$ E. 2 $\vec{i}$ + 2$\vec{j}$ - $\vec{k}$

C. . $\vec{i}$ - 2$\vec{j}$ + 2$\vec{k}$

Jawab:

Proyeksi vektor ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah :

$$|\vec{c}| = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) . \vec{b}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{(\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2})^2} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5-12-2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Jawabannya D